Умов Н.А.

Механическая теория жидко. Вы-

Теория света (стр. 224-1.)


1894 2. семес.
Механическая теорія теплоты
Лекціи проф. Н.А. Умова
Москва

I. Предварительныя понятія

Ученіе, составляющее предметъ нашего курса, отличается отъ остальныхъ физическихъ дисциплинъ - задачами, обнимающими собою всю совокупность физическихъ явленій. Теорія каждаго отдѣльнаго класса явленій ставитъ своею цѣлью изученіе перемѣнъ, относящихся къ этому классу, и изысканіе простѣйшихъ образовъ, изъ коихъ логически вытекали бы остальные, соотвѣтствующіе всѣмъ дѣйствительнымъ явленіямъ. Качество образа опредѣлялось самою группою явленій; нужно было только заботиться и изыскивать простѣйшія количественныя соотношенія. Только въ теоріи свѣта и звука были составлены образы, отличные по качеству отъ изслѣдуемыхъ явленій. Въ то время, какъ въ теплотѣ, электричествѣ, магнетизмѣ — простѣйшіе символы удерживали тѣ же самые признаки тепла, электричества и магнетизма, въ теоріи свѣта и звука основными образами были не свѣтовая или звуковая матерія, а колебанія частицъ эѳира и другихъ тѣлъ

Взаимная превращаемость явленій, открытая первоначально на почвѣ термомеханической, т.е. на почвѣ превращаемости тепла въ работу и обратно, поставила подобныя же задачи въ этой области. Развиваясь, они выдвинули вопросъ объ общихъ законахъ, которымъ подчиняются всѣ перемѣны, происходящія въ природѣ. Передъ этимъ вопросомъ стушевываются подраздѣленія физическихъ явленій. Насъ окружаютъ разнообразныя перемѣны

Умовъ. Механ. Теорія теплоты

Литогр. общест. распр. полезн. книгъ.

или текущія путемъ естественнымъ, или создаваемыя искусственно въ нашихъ лабараторіяхъ и требуется отыскать верховные законы, управляющіе всѣмъ этимъ и качественным и количественнымъ разнообразіемъ. Если въ раздѣленныхъ физическихъ теоріяхъ изысканіе образовъ было соединено съ трудностями, то здѣсь эта трудность осложняется еще тѣмъ, что у насъ исчезаетъ представленіе о качествѣ. Здѣсь, въ области взаимной превращаемости явленій, мы встрѣчаемся съ задачею, увѣренность въ возможности рѣшенія которой характеризуетъ научное міровоззрѣніе. Разсмотримъ ее ближе и постараемся формулировать.

Во-первыхъ самый символъ силы уже требуетъ объясненія; есть попытки и замѣчательныя (H. Hertz, die Prinzipien der Mechanik 1894 г.), имѣющія въ виду замѣнить его простѣйшими представленіями. Во-вторыхъ намъ неизвѣстны строеніе и массы тѣхъ отдѣльныхъ частей матеріальныхъ системъ, къ которымъ эти силы приложены и изъ которыхъ онѣ исходятъ, вообще нашимъ органамъ чувствъ недоступны тѣ элементы матеріи, между которыми обнаруживаются силы. Органами чувствъ и инструментами, какъ бы ни были они совершенны, мы наблюдаемъ и изучаемъ движенія и перемѣны тѣлъ конечныхъ размѣровъ на протяженіи конечныхъ пространствъ, въ теченіи конечнаго времени. Иными словами нам доступны только перемѣны молярныя, и недоступны перемѣны молекулярнаго міра. Если мы остановимъ наше вниманіе на томъ обстоятельствѣ, что незримо-малыя частицы - молекулы и атомы существуютъ въ количествѣ недоступномъ по своей безпредѣльности нашему представленію, что каждая изъ этихъ частицъ обладаетъ своеобразнымъ движеніемъ, что каждая изъ нихъ тѣми или другими силами связана со всѣми остальными, то долженъ явиться вопросъ, доступна ли намъ задача, которую мы оставимъ, не предполагаетъ ли она необходимость детальнаго знанія молекулярнаго міра, закрытаго для нашего непосредственнаго изученія, не требуетъ ли наша задача рѣшенія безпредѣльнаго множества задачъ?

Массы, положенія которыхъ не можетъ быть опредѣлено нашими инструментами, мы назовемъ, согласно обозначенію Герца - скрытыми массами.

Координаты, опредѣляющія положенія этихъ массъ - неопредѣлимы въ противуположность координатамъ опредѣлимымъ, дающихъ намъ положеніе конечныхъ тѣлъ. (J. J. Thomson - приложенія динамики къ физикѣ и химіи, на англійскомъ и нѣмецкомъ языкахъ).

Точно также мы будемъ говорить о скрытыхъ или неопредѣлимыхъ скоростяхъ и движеніяхъ.

Мы признаемъ фактъ, что есть массы, движенія и перемѣны скрытыя, не опредѣлимыя, и есть массы, движенія и перемѣны - опредѣляемыя, явныя, молярныя.

Задачу термодинамики или обще-энергетики мы формируемъ такъ:

Несмотря на незнаніе нами перемѣнъ неопредѣлимыхъ или скрытыхъ, найти общіе законы перемѣнъ молярныхъ, т. е. явныхъ, опредѣлимыхъ.

Самое содержаніе физики уже показываетъ, что незнаніе и недоступность нашимъ чувствамъ молекулярнаго міра не препятствуетъ открытію законовъ, управляющихъ молярными перемѣнами. Должны существовать причины такой возможности, скрытыя въ свойствахъ молекулярнаго міра или скрытыхъ массъ.

Относительно такихъ свойствъ мы можемъ дѣлать только гипотезы. Гипотезы эти должны быть таковы, чтобы влiянiе отдѣльныхъ, индивидуальныхъ формъ неопредѣлимыхъ перемѣнъ сглаживалось, и въ молярныхъ свойствахъ отражался только нѣкоторый суммарный результатъ перемѣнъ неопредѣлимыхъ. Мы не можемъ утверждать à priori что всегда и вездѣ молекулярный мiръ будетъ обладать такими свойствами. Чтобы имѣть право приступить къ рѣшенiю нашей задачи, достаточно будетъ показать на нѣсколькихъ примѣрахъ, доступныхъ или уже изслѣдованныхъ путемъ опыта, что составленiе подобныхъ гипотезъ возможно. Иной совершенно вопросъ - во всякомъ ли данномъ случаѣ мы будемъ въ состоянiи составить себѣ подобную гипотезу, т. е. соотвѣтственный образъ молекулярнаго мiра.

Представимъ себѣ систему мат. точекъ, напримѣръ атомовъ или молекулъ (различiе обоихъ предположенiй будетъ обнаружено далѣе) тѣла, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Координаты точки i пусть будутъ x_i, y_i, z_i, разстоянiе ея отъ начала координатъ есть r_i.

Допустимъ, что эти точки находятся подъ дѣйствiемъ нѣкоторыхъ силъ; слагающiя коихъ по осямъ означимъ черезъ X_i, Y_i, Z_i. Квадратъ разстоянiя $r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$

Ур-iя движенiя точки суть

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad m.\frac{d^2x}{dt^2} = Z \quad \dots (1)$$

(для краткости значки опущены)

Умножимъ эти равенства соотвѣтственно на x, y, z.

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = x\mathfrak{X}\ ;\ my\frac{d^2y}{dt^2} = y\mathfrak{Y};\ mz\frac{d^2z}{dt^2} = z\mathfrak{Z}\ .\ .\ .\ (1a,$$

Возьмемъ производную отъ $\left(x\frac{dx}{dt}\right)$ по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot x + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x\frac{\mathfrak{X}}{m} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = x\mathfrak{X} + m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Совершенно аналогично

$$m\frac{d}{dt}\left(y\frac{dy}{dt}\right) = y\mathfrak{Y} + m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$m\frac{d}{dt}\left(z\frac{dz}{dt}\right) = z\mathfrak{Z} + m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Суммируя эти выраженія и помня, что

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$$

т. е. квадрату скорости, находимъ

$$m\frac{d}{dt}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\} = \mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z + mv^2$$

Но $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dr^2}{dt}$; слѣд.

$$\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z + mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2r^2}{dt^2}\cdot m\ .\ .\ .\ -(2)$$

Суммируя для всѣхъ точекъ системы, находимъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2 = \sum(\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z) + \sum mv^2\ -\ (2a)$$

Мы можемъ обнаружить въ этомъ ур-іи величины, доступныя для опытнаго опредѣленія нашими инструментами. Въ самомъ дѣлѣ, членъ $\sum mr^2$ можемъ представить такъ:

$$\sum mr^2 = \frac{1}{2}\left(2\sum mr^2\right) = \frac{1}{2}\left[2\sum m(x^2+y^2+z^2)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum m(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\sum m(y^2+z^2) + \frac{1}{2}\sum m(z^2+x^2) \quad .. \quad (3)$$

Суммы, здѣсь входящія, суть моменты инерціи нашей системы относительно осей Ox, Oy, Oz. Мы знаемъ изъ механики, что отъ моментовъ инерціи тѣла зависитъ періодъ его колебанія около оси подъ дѣйствіемъ напр. земной тяжести. Если разсматриваемая нами система твердая, то заставивъ ее колебаться, какъ физическій маятникъ около нѣкоторой оси, мы находимъ на опытѣ, что время его колебанія, при неизмѣняемости температуры остается неизмѣннымъ, что указываетъ на неизмѣнимость его момента инерціи около этой оси. Точно такъ же, если бы наша система была жидкой, то заключивъ ее въ сосудъ, мы могли бы образовать изъ нея тоже физическій маятникъ.

Теорія такого маятника была бы болѣе сложна, благодаря тому обстоятельству, что намъ пришлось бы принять въ разсчетъ перемѣщенія частицъ жидкости, но такая теорія, не принимающая въ разсчетъ молекулярныхъ движеній приводитъ опять къ результатамъ согласнымъ съ опытомъ. Итакъ молекулярныя движенія должны обладать тѣмъ свойствомъ, что при неизмѣняемости температуры, моменты инерціи тѣлъ остаются неизмѣняемыми и что разсчеты или теоріи молекулярныхъ, т.е. конечныхъ движеній, даваемые механикой, непринимающія во вниманіе движеній молекулярныхъ, оказываются согласными съ опытомъ.

Это обстоятельство указываетъ намъ на то, что движенія молекулярныя должны удовлетворять одному изъ слѣдующихъ условій:

1) Нѣкоторыя изъ зависящихъ отъ нихъ величинъ сохраняютъ неизмѣнное значеніе для каждаго момента времени.

2) Или же эти величины измѣняются въ теченіи неизмѣримо малыхъ промежутковъ времени, но такъ, что среднее ихъ значеніе за эти промежутки остается неизмѣнымъ.

Эти два предположенія могутъ быть сведены къ слѣдующимъ:

Картина, представляемая намъ молекулярнымъ міромъ въ какомъ нибудь тѣлѣ остается 1) одинаковою для каждаго момента времени, 2) различна для различныхъ моментовъ, но возвращается къ прежнему своему виду черезъ неизмѣримо малые промежутки времени, или 3) сохраняетъ, въ среднемъ ~~выводѣ~~, свою неизмѣнность.

Всѣ эти разсужденія предполагаютъ конечно, что разсматриваемыя нами системы находятся въ видимомъ покоѣ и физическое ихъ состояніе неизмѣняется.

Сообразно съ этимъ мы можемъ составить три гипотезы о молекулярныхъ движеніяхъ. Мы не можемъ утверждать, что представляемъ такими гипотезами дѣйствительное явленіе. Мы составляемъ себѣ только механическій образъ, долженствующій соотвѣтствовать объективнымъ, внѣ насъ происходящимъ перемѣнамъ. Мы довольствуемся этимъ образомъ потому, что слѣдствія, вытекающія изъ него, даютъ намъ новые образы (напр. неизмѣняемость моментовъ инерціи) со-

гласные съ тѣми, которыя извлекаются нами изъ опыта.
1) гипотеза циклическаго замѣщенія одной молекулы другою. т.е. какъ только молекула оставляетъ, занимаемое ею мѣсто въ пространствѣ, она тотчасъ-же замѣщается другою.

2) гипотеза стаціонарнаго движенія молекулъ, состоящая въ томъ, что молекулы описываютъ замкнутыя безконечно малыя орбиты съ одинаковымъ періодомъ, и фазы ихъ одинаковы; при различныхъ фазахъ размѣщеніе частицъ въ различные моменты будутъ различно, но ихъ среднія положенія за безконечно малое время, равное періоду, будутъ неизмѣнны. И за другія безконечно малые промежутки времени картина молекулярнаго міра будетъ неизмѣнною, ибо имѣя уже въ неизмѣримо малыхъ частяхъ пространства чрезвычайно большое число молекулъ, въ этихъ частяхъ встрѣтимся со всевозможными случаями для каждаго момента времени.

3) гипотеза, по которой молекулы описываютъ не замкнутыя орбиты, но могутъ двигаться поступательно, зигзагообразно. При безконечномъ множествѣ молекулъ мы всегда можемъ встрѣтить повторенія движенія какой-либо молекулы въ другой части тѣла.

Эти гипотезы объясняютъ намъ, что цѣлый рядъ величинъ, въ томъ числѣ моменты инерціи, могутъ быть разсматриваемы нами какъ сохраняющіеся во всякомъ случаѣ, неизмѣняющими съ теченіемъ времени свои среднія значенія.

Мы написали выраженіе (3) для нѣкотораго момента времени. Напишемъ подобныя выраженія для цѣлаго ряда слѣдующихъ другъ за другомъ моментовъ, выполяющихъ нѣкоторый промежутокъ времени τ. Сложимъ всѣ эти выраженія и раздѣлимъ на τ. Тогда полученная нами сумма будетъ содержать среднія значенія соотвѣтственныхъ членовъ. Обозначимъ эти среднія значенія чертой надъ каждымъ членомъ

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sum mr^2} = \sum\overline{\left\{Xx + Yy + Zz\right\}} + \sum\overline{mv^2} \ldots (3a)$$

Нетрудно убѣдиться, что если $\frac{d}{dt}\sum mr^2 = 0$ то и $\frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2 = 0$.

Проинтегрируемъ $\frac{d^2\sum mr^2}{dt^2}$ отъ 0 до τ и раздѣлимъ результатъ на τ

$$\frac{1}{\tau}\cdot\int_0^\tau \frac{d^2}{dt^2}\sum mr^2\cdot dt$$

Очевидно, это и есть среднее значеніе перваго члена въ ур. (3); интегрируя, находимъ:

$$\frac{1}{\tau}\left\{\frac{d}{dt}\left(\sum mr^2\right)_\tau - \frac{d}{dt}\left(\sum mr^2\right)_0\right\} \quad \text{или}$$

$$\frac{2m}{\tau}\left\{\sum\left(r\frac{dr}{dt}\right)_\tau - \sum\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0\right\}$$

Для однихъ гипотезъ (циклическое замыканіе)

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)_\tau = \left(r\frac{dr}{dt}\right)_0$$

для другихъ же мы всегда можемъ допустить, что

$$\sum\left(r\frac{dr}{dt}\right)_\tau = \sum\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0$$

или же что разность обѣихъ этихъ величинъ настолько мала, что выбирая τ хотя неизмѣримо малымъ, но достаточно большимъ, частное отъ дѣленія этой разности на τ будетъ близко къ нулю. Поэтому первый членъ выраженія (3a) опускаемъ, и оно приметъ видъ:

$$\Sigma\,\overline{(xX+yY+zZ)}+\Sigma\,\overline{mv^2}=0$$

Помня, что имѣемъ дѣло съ средними величинами, опускаемъ черты и переписываемъ такъ

$$\Sigma\, mv^2=-\Sigma\,(xX+yY+zZ)\;\ldots\ldots\;(4)$$

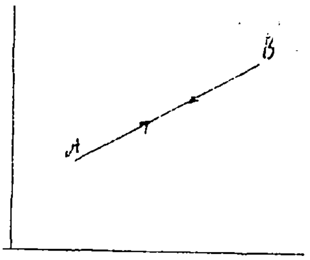
Вторая часть носитъ названіе виріала системы (Clausius), все же выраженіе называется предложеніемъ о виріалѣ. Оно дано Clausius'омъ въ 1870 г.; не зная его, два года спустя тоже предложеніе доказалъ Yvon V. Ciorceau.
Разсмотримъ теперь каждую часть выраженія (4) въ отдѣльности. $\Sigma\, mv^2$ есть удвоенная Σ живыхъ силъ молекулъ системы и есть на основаніи нашихъ гипотезъ величина постоянная, пока система находится въ видимомъ равновѣсіи.
Вторая часть распадается на двѣ.
Слагающія X, Y, Z представляютъ совокупность внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ на систему, т.е.
$X=X_i+X_e$; $Y=Y_i+Y_e$; $Z=Z_i+Z_e$
Выраженіе (4) перепишется такъ

$$\Sigma\, mv^2=-\Sigma\{xX_i+yY_i+zZ_i\}-\Sigma\{xX_c+yY_e+zZ_e\}\ldots\ldots\ldots\;5.$$

Сообразно съ этимъ имѣемъ виріалъ внутренній и внѣшній. Разсмотримъ сначала виріалъ внутреннихъ силъ.

Выдѣлимъ изъ нашей системы какую-либо пару точекъ, коихъ разстояніе есть ρ. Между ними, по линіи ихъ соединяющей, дѣйствуютъ внутреннія силы равныя, и противуположно направленныя, зависящія отъ взаимнаго разстоянія точекъ. Означимъ каждую изъ этихъ взаимныхъ силъ буквою f и допустимъ, что разсматриваемыя силы притягательныя. Пусть разсматриваемыя точки суть A и B съ координатами $x, y, z,$ и x_1, y_1, z_1 Найдемъ слагающія каждой силы по осямъ координатъ.

Слагающая по Ox силы, направленная отъ A къ B, есть



$$X = f\cdot\cos(\rho, x) = f\frac{x_1-x}{\rho}$$

Слагающая по Ox силы противуположной есть

$$X_1 = f\frac{x-x_1}{\rho}$$

Умножая X и X_1 соотвѣтственно на x и x_1 получимъ

$$xX + x_1X_1 = \frac{f}{\rho}\{(x_1-x)x+(x-x_1)x_1\} = -\frac{f}{\rho}(x_1-x)^2$$

Аналогично для слагающихъ по OY и Oz пишемъ:

$$Yy + Y_1y_1 = -\frac{f}{\rho}(y_1-y)^2$$

$$Zz + Z_1z_1 = -\frac{f}{\rho}(z_1-z)^2$$

Суммируя, находимъ:

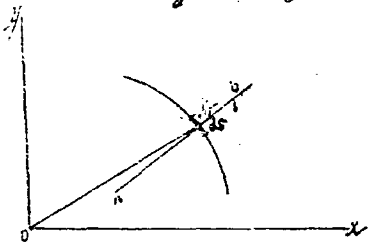
$$(Xx+Yy+Zz)+(X_1x_1+Y_1y_1+Z_1z_1) = -f\rho$$

Такую часть вносятъ во внутренній виріалъ силы,

дѣйствующія между двумя точками.
Распространяя сказанные на всѣ точки, получимъ $-Sf\rho$ которая и составитъ внутренній виріалъ. Итакъ

$$\Sigma mv^2 = Sf.\rho - \Sigma'(X_e x + Y_e y + Z_e z).$$

Вычислимъ виріалъ внѣшнихъ силъ.
Пусть наша система матеріальныхъ точекъ занимаетъ нѣкоторый объемъ V, и пусть дѣйствіе внѣшнихъ силъ выразится въ одномъ давленіи на внѣшнюю поверхность тѣла, вездѣ нормальномъ къ поверхности и одинаковомъ. Его величину на единицу площади означимъ черезъ p.



Выдѣлимъ на нашей поверхности элементъ $d\sigma$. Давленіе на ней $p\,d\sigma$. Слагающая этого давленія по оси X есть

$$X = p\,d\sigma \cos(p,x) = p.d\sigma.(-\cos(n,x)) = -p\cos(nx)\,d\sigma$$

гдѣ n внѣшняя нормаль къ площадкѣ $d\sigma$
Если $OM = r$, то $x = r\cos(r,x)$ $y = r\cos(r,y)$ и т.д.

$$Xx = -p.r\cos(nx)\cos(r,x)\,d\sigma$$

$$Yy = -p.r\cos(n,y)\cos(r,y)\,d\sigma$$

$$Zz = -p.r\cos(n,z)\cos(r,z)\,d\sigma$$

или суммируя.

$$Xx+Yy+Zz = -r.p\{\cos(n,x)\cos(r,x)+\cos(n,y)\cos(r,y)+\cos(n,z)\cos(r,z)\}\,d\sigma$$

$$Xx + Yy + Zz = -r.p\cos(n,r)\,d\sigma$$

Суммируя это выраженіе для всей поверхности, причемъ p считаемъ вездѣ одинаковымъ, получаемъ виріалъ внѣшнихъ силъ

$$-p\,\Sigma\, r\cos(n,r)\,d\sigma \quad и$$

формула (5) окончательно напишется такъ

$$\Sigma\, mv^2 = Sf.\rho + p\,\Sigma_\sigma\, r\cos(n,r)\,d\sigma \;\ldots\ldots 6$$

Соединивъ точки контура $d\sigma$ съ вершиной o, образуемъ безконечно-тонкій конусъ, коего объемъ

$$A = \tfrac{1}{3}\,d\sigma.h \qquad гдѣ\ h = oD = r\cos(r.h).$$

но $h = r\cos(n,r)$ ибо h и n перпендикулярны къ касательной плоскости DM

Объемъ другого внѣшняго конуса $B = \frac{1}{3}\,h_1\,d\sigma_1 = -\frac{1}{3}\,d\sigma\, r_1\cos(n,r_1)$, слѣдовательно объемъ внутренняго усѣченнаго конуса.

$\alpha = A - B = 1/3\,[r\cos(n,r)\,d\sigma + r_1\cos(n\,r_1]\,d\sigma_1]$. Откуда

$3\alpha = r\cos(n,r)\,d\sigma + r_1\cos(n,r_1)\,d\sigma_1$, $3V = 3\Sigma\alpha = \Sigma_\sigma\, r\cos(n,r)\,d\sigma$

Слѣдовательно

$$\Sigma\, mv^2 = Sf.\rho + 3pV \;\ldots\ldots\ldots (7)$$

Во второй части мы имѣемъ величины, поддающіяся измѣренію: объемъ и давленіе.

Мы можемъ теперь специализировать представленіе о разсматриваемой нами системѣ.

Предположимъ, что матеріальныя точки нашей системы представляютъ молекулы газа. Въ такомъ случаѣ

$\frac{1}{2}\sum mv^2$ представитъ собою живую силу движеній молекулъ въ пространствѣ. Эти движенія будутъ только поступательныя, ибо разсматривая молекулы какъ матеріальныя точки, мы тѣмъ самымъ исключили изъ нашего разсмотрѣнія вращательныя движенія молекулъ, пульсирующія движенія, а также движенія атомовъ, составляющихъ молекулу. Наши матеріальныя точки изображаютъ при этомъ воззрѣніи центры массъ нашихъ молекулъ. Итакъ при такомъ предположеніи $\frac{1}{2}\sum mv^2$ не обнимаетъ собою живой силы всѣхъ движеній, существующихъ въ системѣ, а только живую силу поступательнаго движенія молекулъ. Значеніе этого замѣчанія выяснится впослѣдствіи. Только въ одномъ случаѣ $\frac{1}{2}\sum mv^2$ обниметъ собою живую силу всѣхъ движеній системы — это когда молекулы одноатомны, т.е. дѣйствительно могутъ быть представлены одною матеріальною точкою.

Силы, дѣйствующія между молекулами газовъ, при обычныхъ условіяхъ, какъ показываетъ опытъ — ничтожны. Эти силы проявляются только, когда молекулы сближаются на разстояніи весьма близкія другъ къ другу. Пренебрегая этими силами, т.е. полагая $\sum f.\rho = 0$, мы должны получить соотношеніе, которое съ большимъ приближеніемъ выражаетъ нѣкоторыя свойства газовъ при обычныхъ условіяхъ температуры и давленія. Получаемъ:

$$\sum mv^2 = 3pV \qquad \text{или}$$

$$pV = 1/3 \sum mv^2 \quad \ldots \text{(8)}$$

Но если $\sum mv^2 = const$ то $pV = const$, т.е. мы пришли.

къ знакомому намъ закону Маріотта или Бойля. При измѣняющейся температурѣ газы слѣдуютъ закону Маріотта и Ге-Люссака или Шарля и Бойля:

$$p.v = p_0 v_0 (1+\alpha t) \quad - - - \quad (9)$$

Изъ сравнен. выраженій 8 и 9 мы заключаемъ, что средняя живая сила молекулярныхъ движеній есть линейная f температуры, а слѣдовательно тоже можетъ быть измѣряема.

Итакъ, исходя изъ явленій молекулярнаго міра, мы пришли къ величинамъ, опред. опытомъ.

Теперь обратно мы можемъ дѣлать заключенія о процессахъ молекулярныхъ. Пусть Ω средняя скорость поступательнаго движенія молекулъ газа, опредѣляемая изъ условія $M\Omega^2 = \Sigma . mv^2$, гдѣ M масса всего газа и $M\Omega^2$ есть удвоенная живая сила газа. Мы можемъ написать.

$$M\Omega^2 = 3p_0 v_0 (1+\alpha t)$$

откуда

$$\Omega^2 = \frac{3p_0 v_0 (1+\alpha t)}{M}$$

Пусть δ вѣсъ ед. объема газа, v_0 начальный объемъ единицы массы газа и g ускореніе тяжести.

$$Mg = v_0 \delta_0 \quad \text{и} \quad M = \frac{v_0 \delta_0}{g}$$

$$\Omega^2 = \frac{3p_0 g (1+\alpha t)}{\delta_0}$$

Если δ' вѣсъ куб. единицы воздуха при тѣхъ же условіяхъ температуры и давленія, что и разсматриваемаго газа, то плотность послѣдняго относительно воздуха есть $\varepsilon = \frac{\delta}{\delta_0}$ или $\delta_1 = \varepsilon . \delta_0$; слѣд. окончательная средняя скорость движенія молекулъ газообразной среды есть

$$\Omega = \sqrt{\frac{3p_0 g}{\delta_0}} . \sqrt{\frac{1+\alpha t}{\varepsilon}}$$

По этой формулѣ не трудно вычислить скорость молекулярныхъ движеній различныхъ газовъ. Для воздуха имѣемъ при 0° C :

$p_0 = 1^{atm}$ на 1 кв. м. = 10334 кило $g = 9^m 81$

δ_1 = вѣсъ 1 куб. м. воз. при 0° = 1,293 кило, $\varepsilon = 1$ $t_0 = 0$

$$\Omega = 485^m/s$$

Изъ другихъ газовъ для $N - 492^m$, $O - 461^m$, $H - 1848^m$

§2. Состояніе тѣлъ природы и ихъ взаимныя отношенія опредѣляются величинами, которыя, по аналогіи съ величинами, опредѣляющими положеніе точки въ пространствѣ могутъ быть названы координатами. Величины, съ которыми мы встрѣчаемся въ законѣ Шарля и Бойля - объемъ тѣла, внѣшнее давленіе и температура представляютъ собою простѣйшіе виды такихъ координатъ. Мы будемъ часто ими пользоваться, а потому остановимся на нихъ по подробнѣе.

Объемъ единицы массы какого нибудь тѣла; мы будем называть удѣльнымъ объемомъ этого тѣла. Мы будемъ различать давленіе внѣшнее и реакцію со стороны тѣла - давленіе внутреннее или давленіе тѣла.

Температура играетъ существенную роль во всѣхъ явленіяхъ. Такъ равновѣсіе дѣйствительныхъ системъ возможно лишь подъ условіемъ, что температура ихъ частей не мѣняется. Условія, касающіяся вліянія температуры на явленія, какъ видно изъ предыдущаго примѣра вытекаютъ изъ свойства скрытыхъ, неопредѣлимыхъ движеній молекулъ. Мы можемъ подойти къ вопросу объ измѣреніи температуры слѣдующимъ разсужденіемъ. Имѣемъ рядъ тѣлъ a b c d ... и тѣло t, между которыми не можетъ происходить химическихъ реакцій и физическое строеніе коихъ не мѣняется. Приводимъ c въ соприкосновеніи съ первымъ тѣломъ ряда: равновѣсіе этихъ нарушится или не нарушится, т. е. ихъ объемъ или давленіе послѣ прикосновенія измѣнятся или не измѣнятся. Отсюда мы получимъ признаки одинаковаго или неодинаковаго термическаго состоянія тѣлъ, и можемъ составить себѣ представленіе о размѣрахъ этого различія. Тѣло t носитъ названіе термометрическаго. Если t сохраняетъ равновѣсіе при соприкосновеніи съ b и c, то прикосновен. b и c не нарушитъ ихъ равновѣсія, т. е. два тѣла, имѣющія одинаковое термическое состояніе относительно третьяго, одинаковы въ термическомъ отношеніи и другъ къ другу.

Можетъ показаться, что существуютъ отклоненія отъ этого правила. Такъ, напримѣръ, вода при температурахъ ниже и выше 4° C можетъ имѣть равные объемы, поэтому мы можемъ привести ее въ соприкосновеніе съ двумя тѣлами различной температуры и въ концѣ концовъ она можетъ имѣть въ обоихъ случаяхъ одинъ и тотъ же объемъ. Но и здѣсь, если вода приводится въ соприкосновеніе съ тѣломъ, которое имѣетъ температуру отличную, вода будетъ измѣнять свой объемъ.

Итакъ по значенію тѣхъ величинъ, которыя характеризуютъ состояніе термометрическаго тѣла (въ простѣйшемъ случаѣ — объемъ и внутреннее давленіе) въ равновѣсіи, мы судимъ о температурѣ тѣла. Такъ какъ каждое тѣло природы можетъ быть разсматриваемо какъ тѣло термометрическое, какъ термометръ, мы заключаемъ, что между величинами, характеризующими физическое и механическое состояніе тѣла и его температурой должно существовать соотношеніе. Если мы допустимъ, что наши разсматриваются случаи, когда температура тѣла одинакова на всемъ его протяженіи и когда оно находится подъ внѣшнимъ давленіемъ, одинаковымъ во всѣхъ его точкахъ и нормальнымъ къ наружной поверхности, такое соотношеніе представится нѣкоторой $f(p, v, t) = 0$. Примѣръ такого соотношенія для газовъ мы имѣемъ въ законѣ Ширля и Бойля. Такое соотношеніе наз. уравненіемъ состоянія тѣла. Мы можемъ представить его геометрически, нѣкоторой поверхностью, принявъ p, v, t за оси прямоугольной системы координатъ. Такая поверхность наз. термодинамической поверхностью. Мы заключаемъ кромѣ того, что изъ трехъ перемѣнныхъ p, v, t, характеризующихъ состояніе тѣла только двѣ независимы.

Намъ интересны только перемѣщенія точекъ системы по отношенію другъ къ другу, а не измѣненія ихъ абсолютнаго положенія въ пространствѣ. Поэтому самому мы предположимъ, что центръ массы нашей системы находится въ покоѣ и что тѣло не вращается. Извѣстно, что живую силу какой нибудь системы мы можемъ представить суммою двухъ членовъ: одинъ представляетъ живую силу движенія центра массы системы, а другой — живую силу по отношенію къ осямъ, имѣющимъ свое начало въ центрѣ массы и направленіе коихъ неизмѣнно въ пространствѣ. Называя чрезъ V скорость центра массы, а черезъ u скорости точекъ системы относительно только что указанныхъ осей координатъ, имѣемъ :

$$S\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} MV^2 + S\frac{mu^2}{2} \; .$$

Мы можемъ разбирать нашу систему на произвольно малыя части и къ каждой изъ нихъ приложить только что указанное разложеніе, такъ что M будетъ означать массу одной изъ такихъ малыхъ частей. За такую малую часть мы можемъ принять молекулу тѣла. Слѣдовательно $\frac{1}{2}MV^2$ представитъ живую силу поступательнаго движенія молекулы, а $S\frac{mu^2}{2}$ - живую силу атомныхъ движеній въ молекулѣ.

Итакъ

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma S\frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{1}{2} MV^2 + \Sigma S\frac{mu^2}{2} \; \dots\dots \quad 2.$$

Слѣдовательно живая сила системы T будетъ разсматриваться нами какъ состоящая изъ живой силы молекулярныхъ (поступательныхъ) движеній и живой силы движеній атомныхъ.

II. Энергія.

§3. Имѣемъ тѣло (опр. извѣстными координатами) окруженное рядомъ другихъ. Допустимъ, что въ нашемъ тѣлѣ произошли перемѣны; вообще они связаны съ перемѣнами въ тѣлахъ внѣшнихъ. Эту связь мы можемъ разсматривать какъ способность даннаго тѣла производить перемѣны въ тѣлахъ внѣшнихъ. Будемъ искать выраженіе этой способности и ея мѣру. Рѣшеніе этой задачи можетъ быть получено различными путями.

Одинъ изъ пріемовъ основывается на принципѣ невозможности построенія машины вѣчнаго движенія (perpetuum mobile) т. е. полученія работы въ безпредѣльномъ количествѣ изъ ничего или наоборотъ, въ невозможности безслѣднаго исчезновенія работы (Ueber die Erhaltung der Kraft Helmholtz)

Второй пріемъ основанъ на опытномъ изученіи превращенія тепла въ работу и обратно;

третій – на спеціальномъ представленіи о характерѣ силъ, дѣйствующихъ въ природѣ, приписывающемъ имъ свойства консервативныхъ силъ.

Мы остановимся сначала на первомъ выводѣ, въ основѣ коего лежитъ принципъ, извлекаемый изъ опыта тысячелѣтій и потому стоящій внѣ спеціальныхъ гипотезъ.

Всякое явленіе мы можемъ оцѣнивать съ точки зрѣнія количества работы, затрачиваемой на то, чтобы произвести это явленіе. Такую оцѣнку происходящихъ перемѣнъ мы называемъ отысканіемъ ихъ механическаго эквивалента.

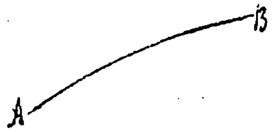
Экспериментальное изученіе взаимной превращаемости явленій, доказываетъ, что каждой перемѣнѣ соотвѣтствуетъ нѣкоторый механическій эквивалентъ.

Допустимъ, что нѣкоторое количество тепла было отдано путемъ теплопроводности или лучеиспусканіемъ поверхностью тѣлъ, окружающихъ разсматриваемое нами тѣло. Часть этой теплоты, выраженную въ единицахъ работы и связанную съ перемѣнами въ тѣлѣ, означимъ черезъ Q. Пусть кромѣ того перемѣны въ тѣлѣ связаны съ затратою работы нѣкоторыхъ силъ, дѣйствующихъ между тѣломъ и его окружающими. Эту работу назовемъ черезъ W.

При этихъ предположеніяхъ вся перемѣна, связанная съ явленіями, происходящими въ тѣлѣ, или ея механическій эквивалентъ выразится черезъ

$$Q + W$$

гдѣ Q и W могутъ быть + или –, смотря по тому, пріобрѣтаетъ наше тѣло тепло и работу или же отдаетъ ихъ. Q + W можно назвать алгебраической Σ механическихъ эквивалентовъ перемѣнъ. Остановимся на случаѣ перемѣнъ безконечно малыхъ. Для наглядности разсужденія представимъ конечную перемѣну въ тѣлѣ геометрической нѣкоторой конечной кривой A B. Весьма малая перемѣна въ тѣлѣ будетъ соотвѣтствовать элементу кривой δs или, условно, переходу тѣла по этому элементу. Ему будетъ соотвѣтствовать измѣненіе

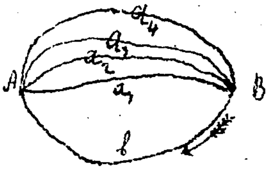


$$\delta q + \delta w$$

а переходу тѣла изъ состоянія A въ состояніе B – совокупность перемѣнъ:

$$\sum \delta q + \sum \delta w .$$

Пусть кривая, характеризующая процессъ, испытываемый тѣломъ, будетъ замкнутой, т. е. тѣло возвращается въ начальное состояніе, проходя рядъ измѣненій по кривой BbA.



Мы ограничимся разсмотрѣніемъ такихъ процессовъ, въ которыхъ возвратъ тѣла къ начальному состоянію возможенъ.

Въ дѣйствительности мы встрѣчаемся также съ явленіями, при которыхъ подобный возвратъ къ начальному состоянію невозможенъ; напримѣръ, обращеніе алмаза въ уголь возможно сжиганіемъ алмаза; обратный же процессъ до послѣдняго времени оставался недостижимымъ и только въ послѣднее время усилія въ этомъ направленіи, повидимому, увѣнчались успѣхомъ. Другіе подобные случаи мы будемъ приписывать недостаточности нашихъ знаній и техническаго умѣнія.

Разсматривая выраженіе II для этого замкн. цикла мы постараемся узнать будетъ ли оно больше или < нуля.

Если $\Sigma \delta q + \Sigma \delta w < 0$ то это означаетъ, въ виду нашего законоположенія, увеличеніе работы или тепла во внѣшнихъ тѣлахъ.

Повторяя такой циклъ безпредѣльное число разъ, мы получимъ безпредѣльное увеличеніе тепла или безконечно большую работу, что противорѣчитъ нашему основному принципу.

Если $\Sigma \delta q + \Sigma \delta w > 0$, то внѣшнія тѣла отдали нашему тѣлу тепло или работу; но тѣло вернулось въ начальное состояніе, слѣдовательно произошло безслѣдное исчезновеніе тепла или работы, чего быть не можетъ.

Остается предположить что

$$\Sigma \delta q + \Sigma \delta w = 0$$

Итакъ въ замкнутомъ циклѣ Σ безконечно малыхъ измѣненій есть 0. Разбивая эту сумму на двѣ части на пути AB и BA имѣемъ

$$\left\{\Sigma(\delta q) + \Sigma \delta w\right\}_a = -\left\{\Sigma \delta q + \Sigma \delta w\right)_b$$

т.е. перемѣны въ одной части цикла уничтожаются

перемѣнами въ другой. Теперь положимъ, что существ: цѣлый рядъ путей, которыми тѣло изъ состоянія A можно перевести въ B, напримѣръ $a, a_2 \ldots$ За обратный примемъ одинъ и тотъ же B въ A.
Подобно предъидущему имѣемъ

$$\left\{\Sigma\delta q+\Sigma\delta w\right\}_{a}=-\left\{\Sigma\delta q+\Sigma\delta w\right\}_{e}$$

$$\left\{\Sigma\delta q+\Sigma\delta w)\right\}_{a_2}=-\left\{\Sigma\delta q+\Sigma\delta w\right\}_{e} \text{ и т. д.}$$

Отсюда видимъ, что, разбираемыя перемѣны не зависятъ отъ промежуточныхъ состояній тѣла, а только отъ начальнаго и конечнаго состоянія. Потому эти перемѣны могутъ быть представлены разностью значеній одной и той же функціи величинъ, характеризующихъ состояніе тѣла:

$$\left\{\Sigma\delta q+\Sigma\delta w\right\}_{a}=\varphi_B-\varphi_A$$

Эта форма выражаетъ уже независимость $\{\ \}_a$ отъ характера процесса между крайними состояніями тѣла. Если прибавить къ φ постоянное, то разность $\varphi_B-\varphi_A$ не измѣнится. Пусть $\varphi = U - \text{const}$, $U = \varphi + \text{const}$ гдѣ φ не зависитъ отъ состоянія внѣшнихъ тѣлъ, а только отъ состоянія разсматриваемаго тѣла. Это U называется энергіей тѣла. Измѣненія этой функціи U и опредѣляютъ перемѣны во внѣшнихъ тѣлахъ; она и можетъ быть принята за мѣру способности тѣла производить измѣненія во внѣшнихъ тѣлахъ. Итакъ:

$$\Sigma(\delta q)+\Sigma\delta w=U_2-U_1 \quad \ldots\ldots \quad 13$$

Пусть α, β, γ ... суть перемѣнныя, опредѣляющія сост. тѣла, тогда при безконечно маломъ измѣненіи состояніемъ:

$$U_2 = \varphi(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma \ldots \ldots \ldots) + const.$$

$$U_1 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma \ldots \ldots \ldots) + const.$$

Если предположимъ, что конечн. состояніе тѣла безконечно мало разнится отъ начальнаго, то для безконечно малой трансформаціи будемъ имѣть (14) $\delta q + \delta w = U_2 - U_1 = \frac{d\varphi}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\varphi}{d\beta} d\beta + .. = dU$
Замѣчаемъ, что dU есть точный дифференціалъ функціи.
Уравненіе (14) есть выраженіе перваго закона термодинамики (перв. слѣд. форм. (13))
Будемъ теперь разсматривать наше тѣло и остальныя внѣшнія тѣла какъ одну систему, уединенную отъ всѣхъ другихъ и приложимъ къ ней ур. (14.)
Такъ какъ для такой системы внѣшнихъ тѣлъ болѣе нѣтъ, то нѣтъ и внѣшнихъ перемѣнъ, т. е $\delta q = 0$ $\delta w = 0$;
$dU = 0$ т.е. $U = const$ . . . . . . (15)
Это второе слѣдствіе формулы (13) или (14); оно показываетъ, что перемѣны происходящія въ изолированной системѣ тѣлъ перемѣны внутреннія, происходящія отъ внутреннихъ взаимодѣйствій въ системѣ, не измѣняютъ ея энергіи.
Это есть законъ сохраненія энергіи.
Для замкнутаго цикла $\Sigma\{\delta q + \Sigma \delta w\} = 0$, причемъ $\Sigma \delta q$ и $\Sigma \delta w$ въ отдѣльности могутъ быть не равны нулю.
Въ этомъ случаѣ

$$\Sigma \delta q = -\Sigma \delta w \quad . \ . \ . \ . \ . \ 16.$$

Это есть законъ эквивалентности тепла и работы.

Буквой J обозначимъ постоянный множитель, представляющій коэффиціентъ приведенія тепла, выраженнаго въ калоріяхъ, въ единицы работы. Называя черезъ q_1 количество тепла, выраженное въ калоріяхъ, имѣемъ $\Sigma \delta q = J \Sigma \delta q_1$; слѣд.

$$J = \frac{\Sigma \delta w}{-\Sigma \delta q_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 17\,1а$$

J есть механическій эквивалентъ теплоты.

Послѣдній законъ, найденный опытнымъ путемъ и являющійся слѣдствіемъ формулы (13), можетъ быть взятъ за исходную точку разсужденій, и изъ него мы могли бы вывести всѣ наши формулы въ обратномъ порядкѣ (См. Helmholz: Die Erhaltung der Kraft; Planck: Das Princip der Erhaltung der Energie 1887 г; P. Duhem: Commentaire aux principes de la Thermodynamique. Journal de mathematiques pures et appliquées, serie 4 T. VIII 1892 г.)

§5. Законы, выведенные нами на основаніи принципа невозможности perpetuum mobile, могутъ быть получены, какъ указано Clausius'омъ, Helmholtz'емъ и W. Thomson'омъ, изъ предположенія объ особыхъ свойствахъ силъ, дѣйствующихъ въ природѣ.

Пусть матеріальная точка движется подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ въ плоскости xy. Если компон. силы по осямъ X и Y, приращенія пути dx, dy, то

$$Xdx + Ydy$$

есть дифференціалъ работы силы на точку M; другими словами, есть dW

$$dW = Xdx + Ydy \quad - \; - \; - \; . \; 18$$

Литогр. Общ. распр. полезн. книгъ.

Тутъ возможны два случая: вторая часть интегрируется - есть точный дифференціалъ, и не интегрируется. Въ первомъ случаѣ должно выполнить условіе

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

т. е. X и Y должны быть частными производными одной функціи. Эта функція носитъ названіе силовой функціи

$$X = \frac{\partial F}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Подставляя въ выраж. (18), находимъ

$$dW = \frac{d\,F(x,y)}{dx}\,dx + \frac{d\,F(x,y)}{dy}\,dy$$

$$dW = d\,F(x,y)$$

$$W = F(x,y) + const$$

Когда силы носятъ указанный характеръ, то работа силъ опредѣляется начальнымъ и конечнымъ положеніемъ точки. Если начальное положеніе опредѣляется координатами $x_0\, y_0$, конечное координат. $x_1\, y_1$, то $W_1 - W_0 = F(x_1 y_1) - F(x_0\, y_0)$ т. е. работа не зависитъ отъ пути.

Но если условіе интегрируемости не выполнено, то должно быть дано соотношеніе $y = f(x)$, опредѣляющее путь, по которому перемѣщается точка. Итакъ $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$

$$X = \varphi(x,y) = \varphi\{x, f(x)\} \quad Y = \psi(x,y) = \psi(x, f(x))$$

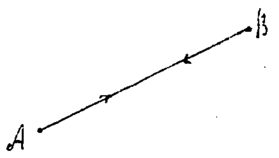
$$dW = \{\varphi(x, fx) + \psi(x, fx)\, f'x\}\, dx.$$

т. е. dW опредѣляется квадратурой

Все сказанное можетъ быть отнесено на случай движенія точки въ пространствѣ.

Первый законъ термодинамики можетъ быть выведенъ изъ механическаго воззрѣнія, принимающаго, что всѣ силы природы суть ~~центральныя~~, т. е. дѣйствующія по линіи соединен. центровъ и зависящія только отъ разстояній между ними.

Выразимъ работу центральныхъ силъ, дѣйствующихъ между двумя точками A и B. Пусть дѣйствующая сила есть $f(r)$, ея слагающая по x на точку A



$$X_1 = f(r)\cos(r,x) = f(r)\,\frac{x_2 - x_1}{r}$$

Аналогично:

$$Y_1 = f(r)\cos(r,y) = f(r)\,\frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$Z_1 = f(r)\cos(r,z) = f(r)\,\frac{z_2 - z_1}{r}$$

Слагающія на B суть

$$X_2 = f(r)\,\frac{x_1 - x_2}{r}$$

$$Y_2 = f(r)\,\frac{y_1 - y_2}{r}$$

$$Z_2 = f(r)\,\frac{z_1 - z_2}{r}$$

Если $dx_1\, dy_1\, dz_1$ прираш. координатъ A, а $dx_2\, dy_2\, dz_2$ прираш. координатъ B, то работы есть

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 =$$
$$= \frac{fr}{r}\left\{(x_2 - x_1)\,dx_1 + (x_1 - x_2)\,dx_2 + (y_2 - y_1)\,dy_1 + (y_1 - y_2)\,dy_2 + \ldots\right\} \quad 19$$

Но скобка второй части есть $-rdr$

$$dW_i = -f(r)dr$$

значекъ i показываетъ, что имѣемъ дѣло съ силами внутренними. Если на нашу систему дѣйствуютъ также силы, исходящія изъ внѣшнихъ центровъ, то работа этихъ силъ не выразится вообще полнымъ дифференціаломъ $-f(r')dr'$, гдѣ r' есть разстояніе внѣшняго центра отъ какой нибудь точки нашей системы. Такое выраженіе будетъ имѣть мѣсто лишь въ частномъ случаѣ когда, внѣшній центръ неподвиженъ.

Еслибы B было такимъ внѣшнимъ центромъ, то въ работу силъ, дѣйствующихъ на точки системы, не вошли бы выраженія вида $x_2dx_2 + y_2dy_2 + z_2dz_2$, и потому мы не получили бы полнаго дифференціала.

Исключеніемъ былъ бы только случай когда $dx_2 = 0$, $dy_2 = 0$, $dz_2 = 0$, т. е. внѣшній центръ неподвиженъ. Назовемъ работу такихъ внѣшнихъ центровъ чрезъ dW_e и распространимъ выраженіе dW_i и dW_e на всѣ точки системы; тогда работа силъ, дѣйствующихъ на нашу систему, есть

$$dW = -\Sigma f(r)dr + dW_e$$

Обозначая $f(r)dr$ чрезъ $d(\psi(r) + const)$. и $\Sigma d(\psi(r) + const)$. черезъ $d\Pi$ имѣемъ

$$dW = -d\Pi + dW_e \quad \dots\dots 90$$

или по интегрированіи

$$W = -\Pi + \int dW_e \quad \dots\dots 91.$$

Называя живую силу системы T, мы имѣемъ по ур-iю живыхъ силъ $dW = dT$, гдѣ $T = \frac{1}{2} \Sigma m \{(\frac{dx}{dt})^2 + \ldots\}$

Выраженiе (21) перепишется иначе такъ

$$dT = -d\Pi + dW_e \quad .\ .\ .\ .\ 22.$$

и если внѣшнихъ силъ нѣтъ, т. е. система изолирована отъ остальныхъ то $dW_e = 0$ и

$$dT = -d\Pi$$

$$T = -\Pi + Const. \quad T + \Pi = const \quad .\ .\ .23$$

T есть кинетическая энергiя системы, Π потенцiальная, а $T + \Pi$ есть полная энергiя U системы, слѣд., $T + \Pi = const$ есть законъ сохраненiя энергiи.

Если получается приростъ энергiи dU, то система получаетъ извнѣ тепло и работу; если же она вернулась въ начальное состоянiе, то

$$\Sigma dU = 0 = \Sigma (dQ + dW^{\circ}) \text{ и } -\Sigma dQ = \Sigma dW^{\circ} \ldots 24$$

и мы имѣемъ законъ эквивалентности тепла и работы.

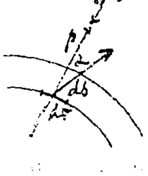
Выведенные законы имѣютъ только количественный смыслъ, представляя результатъ подсчета перемѣнъ, происходящихъ при измѣненiи состоянiя тѣлъ.

Качественная же сторона превращаемости явленiй ими не разъясняется.

§6. Предположимъ, что дѣйствiе внѣшнихъ силъ приводится только къ давленiямъ, нормальнымъ къ поверхности тѣла и одинаковымъ на всемъ ея протяженiи.

Вычислимъ работу этихъ давленiй. Давленiе означимъ черезъ p; тогда давленiе на элементъ поверхности $d\sigma$

будетъ $pd\sigma$. Допустимъ, что тѣло расширяется по какимъ нибудь причинамъ; при этомъ давленіе тѣла, равное внѣшнему, побѣждаетъ послѣднее. Работа внѣшнихъ давленій при расширеніи тѣла будетъ, слѣдовательно, отрицательна. Если ds есть путь, описываемый элементомъ $d\sigma$ при расширеніи тѣла, то слагающая давленія $pd\sigma$ по направленію ds будетъ $-pd\sigma\cos\alpha$ и работа есть $-pd\sigma\,ds\cos\alpha$.



Но $-pd\sigma.ds\cos\alpha = -p.d\sigma.dn = -p.d\omega$ гдѣ $d\omega$ объемъ безконечно малаго цилиндра съ основан. $d\sigma$ и образующей ds. Суммируя, имѣемъ $-p\,\Sigma d\omega = -p\,dv$. Итакъ, работа внѣшнихъ давленій есть $dW = -p\,dv$ и формулу $dU = dQ + dW$ перепишемъ такъ

$$dU = dQ - pdv \quad - - - - - 25.$$

Выше мы видѣли, что для каждаго тѣла между p, v и t существуетъ связь, представляемая уравненіемъ состоянія, при условіи, что во всѣхъ точкахъ тѣла t одинаково. Любой парой p,v, p,t, v,t можно опредѣлить состояніе тѣла. Возьмемъ за независимыя перемѣнныя p, v. Начертимъ на плоскости систему прямоугольныхъ осей: на абсциссѣ будемъ откладывать объемы, на ординатѣ - внѣшнее давленіе. Каждому состоянію тѣла будетъ соотвѣтствовать на плоскости - точка (p,v). Такое графическое представленіе состоянія тѣла, назыв. діаграммой, введено Клапейрономъ. Допустимъ, что температура и давленіе внѣшнихъ тѣлъ, прикасающ. съ нашимъ, тѣ же, что и для послѣдняго.

Всякому безконечно малому измѣненію въ внѣшнихъ тѣлахъ соотвѣтствуетъ безконечно малое измѣненіе нашего тѣла. Уменьшимъ безконечно малое внѣшнее давленіе: тѣло безконечно мало расширится; если его увеличимъ на безконечно малую величину - тѣло опять сожмется - т. е. процессъ можетъ идти въ томъ и другомъ направленіяхъ, при чемъ тѣло проходитъ черезъ тѣ же самыя состоянія, такой процессъ наз. обратимымъ. Условіе обратимости процесса заключается въ безконечно маломъ различіи между температурой и давленіемъ даннаго тѣла и тѣлъ внѣшнихъ; если это различіе конечно, то процессъ не обратимъ: хотя мы и можемъ вернуть тѣло въ его первоначальное состояніе, но этотъ обратный процессъ будетъ составленъ изъ состояній тѣла, отличныхъ отъ процесса прямого. Въ самомъ дѣлѣ, при конечной разности давленій тѣла и внѣшней среды, дадимъ внѣшнему давленію безконечно мало положит. приращ.; тѣло сожмется, если дадимъ приращ. отрицательное, то тѣло будетъ продолжать сжиматься. Тоже скажемъ и о конечномъ различіи температуръ: если тѣло холоднѣе окружающей среды, оно будетъ принимать тепло извнѣ, увеличиваясь въ объемѣ и обратный процессъ - отдача тепла, сжатіе тѣла невозможны. Если тѣло теплѣе окружающей среды, то невозможно принятіе имъ тепла и расширеніе. Мы будемъ разсматривать сначала обратимые процессы - идеальные: процессы, дѣйствительно происходящіе въ природѣ, подходятъ къ нимъ только съ большимъ или меньшимъ приближеніемъ. Изъ того обстоятельства, что въ процессахъ обратимыхъ температуры и давленіе тѣла безконечно-мало разнятся отъ температуры и давленія внѣшней среды, слѣдуетъ, что эти процессы должны происходить безконечно медленно: тѣло и среда находятся въ состояніи безконечно близкомъ къ механическому и тепловому равновѣсію.

Выборъ p и v за величины, характеризующія состояніе тѣла, представляетъ то удобство, что работа внѣшнихъ давленій, сопровождающая процессъ, выражается площадью между кривой, изображающей процессъ, ординатами конечныхъ точекъ и осью абсциссъ. Именно

$$W = \int p\,dv.$$

Мы знаемъ, что при нарастаніи объема, т.е. при $dv = +$, работа внѣшнихъ давленій отрицательна, т.е. работаетъ тѣло. Поэтому, если процессъ совершается въ сторону возрастающихъ v (процессъ прямой), выраженіе W представляетъ работу, отдаваемую тѣломъ. При убывающихъ v (процессъ обратный), W будетъ отрицательно и представляетъ работу, принимаемую тѣломъ. Процессъ, заканчивающійся состояніемъ тѣла, тождественнымъ съ исходнымъ, наз. круговымъ, или замкнутымъ цикломъ. Круговой процессъ описывается въ прямомъ направленіи, если состоянія тѣла, имъ изображаемыя, слѣдуютъ другъ за другомъ въ направленіи движенія часовой стрѣлки. Обратное направленіе процесса совпадаетъ съ измѣненіемъ состояній тѣла въ направленіи противуположномъ движенію часовой стрѣлки. Площадь, ограничиваемая круговымъ процессомъ въ первомъ случаѣ представитъ работу, отданную тѣломъ, во второмъ - принятую.

Для конечнаго процесса

$$\Sigma dQ = U_1 - U_0 + \int p\,dv \quad - - - - 26.$$

Для замкнутаго цикла $U_1 = U_0$, и потому $\Sigma dQ = \int p\,dv$

Площадь замкнутаго цикла въ первомъ случаѣ будетъ положительною, ибо p для $dv = +$, больше p, для $dv = -$, а потому и $\Sigma\, dQ = +$, т. е. площадь замкнутаго цикла представляетъ работу, отданную тѣломъ на счетъ тепла, полученнаго извнѣ: въ этомъ циклѣ происходитъ превращеніе тепла въ работу. Въ циклѣ обратномъ $\int p dv = -$, и слѣд. $\Sigma\, dQ = -$. Поэтому здѣсь площадь представляетъ работу, принятую тѣломъ и превращенную процессомъ въ тепло, которое отдано окружающей средѣ.

Если обѣ вѣтви замкнутаго цикла сольются, то площадь $= 0$ и работа 0, а вмѣстѣ съ тѣмъ и $\Sigma\, dQ = 0$, т.е. тѣло отдаетъ при обратномъ процессѣ столько же тепла, сколько получило при прямомъ. Поэтому если тѣло при нѣкоторой безконечно малой трансформаціи получаетъ извнѣ тепло dq, то при обратной трансформаціи оно отдаетъ такое же количество тепла $(-dq)$ внѣшней средѣ. Будемъ при этомъ помнить, что согласно съ выводомъ нашего перваго закона dq всегда представляетъ потерю или выигрышъ тепла внѣшними тѣлами лучеиспусканіемъ или теплопроводностью.

Процессы тепла при неизмѣнной температурѣ наз. изотермическими. Законы ихъ легко получаются, если въ уравненіи состоянія тѣла полож. $t = \mathrm{const}$, т. е.

$$f(p, v, \mathrm{const}) = 0$$

Другой процессъ, когда тѣло не обмѣнив. тепл. съ окружающими тѣлами, наз. адіабатнымъ.

Здѣсь $dQ = 0$ и $dU + pdv = 0$. Слѣдовательно если $dv = +$ то $dU = -$, т. е. тѣло при расширеніи работаетъ на счетъ своей внутренней энергіи и обратно.

Первый законъ термодинамики имѣетъ мѣсто для всякаго рода процессовъ, какъ это ясно изъ его вывода.

Въ случаѣ процессовъ необращаемыхъ, къ которымъ принадлежатъ процессы, естественнымъ образомъ происходящіе въ природѣ, части тѣла, въ нихъ участвующихъ, могутъ обладать явными, опредѣленными движеніями, а потому къ внутренней энергіи этихъ тѣлъ должны быть прибавлены еще члены, представляющіе живую силу опредѣлимыхъ движеній; называя ее черезъ τ, мы напишемъ:

$$dQ = dU - dW + d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \; 26a$$

III. Энтропія.

§ 7. Первый законъ термодинамики основывается, как было показано выше, на эквивалентности тепла и работы. Превращаемость работы въ тепло можетъ быть разсматриваема, какъ сопровождаемая перемѣщеніемъ нѣкотораго числа единицъ работы или энергіи изъ одной формы въ другую. Первый законъ термодинамики выражаетъ собою только то, что при такомъ перемѣщеніи ни одна единица энергіи или работы не утрачивается. Но въ немъ мы не находимъ указаній на то, сколько единицъ работы, при данныхъ условіяхъ, перемѣстится изъ одной формы въ другую. Иными словами, первый законъ выражаетъ собою только количественную сторону превращаемости, а не качественную. Для уясненія законовъ, управляющихъ этою послѣднею, нужно прибѣгнуть къ новымъ принципамъ. Такой принципъ мы находимъ въ законѣ естественнаго обмѣна тепла между тѣлами: естественный переходъ тепла совершается отъ теплаго тѣла къ холодному: процессъ обратный этому естественному, т. е. перенос тепла съ холоднаго тѣла на теплое, можетъ произойдти только при затратѣ внѣшней работы.

Въ такой формѣ былъ высказанъ искомый принципъ Клаузіусомъ въ 1850 г. Первая его половина находитъ свое непосредственное оправданіе въ наблюденіи и опытѣ. Что касается второй, то она находитъ свое подтвержденіе въ тѣхъ слѣдствіяхъ, которыя изъ нее вытекаютъ и оказываются согласными съ опытомъ.

Подобно тому, какъ при выводѣ закона сохраненія энергіи, мы находимъ опору въ обыденномъ и тысячелѣтнемъ опытѣ - невозможности построенія perpetuum mobile, создающаго работу, такъ и здѣсь - идеи Клаузіуса могутъ быть связаны съ результатомъ такого же обыденнаго и продолжительнаго опыта, заключающагося въ невозможности построенія машины perpetuum mobile 2-го типа, не создающей работы, но превращающей въ работу - путемъ тепловаго обмѣна - безпредѣльные запасы энергіи въ природѣ.

Допустимъ, что естественный обмѣнъ тепла происходитъ въ направленіи, наблюдаемомъ нами въ природѣ, т. е. отъ теплаго тѣла къ холодному. Представимъ себѣ затѣмъ холодный термометръ, опущенный въ более теплый океанъ. Энергія, въ громадномъ количествѣ заключенная въ движеніяхъ частицъ океана, будетъ передаваться тепловымъ обмѣномъ термометру. Столбикъ термометра будетъ повышаться и можетъ приводить въ движеніе машину, преобразуя такимъ образомъ тепло въ работу. Это будет продолжаться до тѣхъ поръ, пока термометръ приметъ температуру океана, и столбикъ его остановится. Слѣдовательно, при томъ законѣ обмѣна тепла, который имѣетъ мѣсто въ природѣ perpetuum mobile $2^{\text{го}}$ типа невозможно.

Сдѣлаемъ теперь обратное предположеніе: допустимъ, что естественный переходъ тепла совершается отъ холоднаго тѣла къ теплому.

Въ такомъ случаѣ погрузимъ теплый термометръ въ болѣе холодный океанъ. Энергія изъ океана путем тепловаго обмѣна будетъ безостановочно и безпредѣльно передаваться термометру, потому что все время онъ будетъ имѣть температуру, болѣе высокую, чѣм температура океана. Столбикъ термометра будетъ неизмѣнно повышаться и приводить въ движеніе машину, преобразуя тепло въ работу. Perpetuum mobile $2^{\text{го}}$ типа было бы осуществимо, мы могли бы построить механизмъ, который двигалъ бы корабли, не расходуя топлива, а пользуясь исключительно энергіей окружающихъ водъ.

Мы видимъ такимъ образомъ, что экспериментальный законъ Клаузіуса тожественъ съ невозможностью машины perpetuum mobile 2 типа. Эта невозможность представляетъ другое выраженіе искомаго нами принципа.

Заслуга Клаузіуса заключается въ развитіи идей, которыя были высказаны гораздо раньше и долгое время оставались забытыми. Именно Сади Карно (род. 1796 г. ум. 1832 г) издалъ въ 1824 г. сочиненіе подъзаглавіемъ „Reflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à developper cette puissance."

Здѣсь Карно высказываетъ свое знаменитое предложеніе (принципъ Карно): „Движущая сила тепла не зависитъ отъ природы работающихъ тѣлъ; ея величина опредѣляется единственно температурами тѣхъ тѣлъ, между которыми въ концѣ концовъ происходитъ переносъ тепла (Reflexions... p. 20)."

Для выясненія этой мысли, приведемъ нѣсколько извлеченій изъ сочиненія Карно.

„Произведеніе движенія въ паровыхъ машинахъ сопровождается всегда однимъ обстоятельствомъ, на которое мы должны обратить вниманіе. Это обстоятельство заключается въ возстановленіи равновѣсія тепла, т. е. въ переходѣ его отъ тѣла съ болѣе высокой температурой къ тѣлу съ температурой болѣе низкой..... Въ паровой машинѣ тепло, развившееся въ очагѣ вслѣдствіе горѣнія, проникаетъ черезъ стѣнки котла, образуетъ пары, такъ сказать, соединяется съ ними. Пары, увлекая тепло съ собою, несутъ его сначала въ цилиндръ, гдѣ они совершаютъ извѣстную работу, а оттуда въ холодильникъ, гдѣ сгущаются въ жидкость.... Такимъ образомъ холодная вода холодильника завладѣваетъ въ концѣ концовъ тепломъ, образовавшимся отъ горѣнія.... "

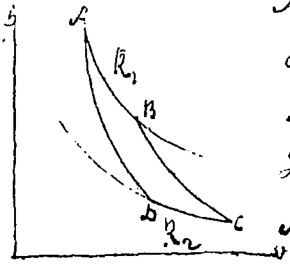
„Произведеніе движущей силы въ паровыхъ машинахъ обусловливается такимъ образомъ не дѣйствительнымъ потребленіемъ тепла, но переносомъ тепла съ теплаго тѣла на холодное."

...„На основаніи этого принципа для возникновенія движущей силы недостаточно произвести тепло: нужно еще получить холодъ." (Reflexions. p. 5-6).

§8. Приравнивая паденіе тепла отъ очага къ холодильнику, т.е. переходъ его отъ высшей температуры къ низшей, паденію воды съ нѣкоторой высоты, Карно предполагаетъ, что тепло не расходуется на работу, какъ не расходуется вода водопада. Но оставляя въ сторонѣ эту неразрушимость тепла, противорѣчащую закону сохраненія энергіи, термодинамика извлекла изъ идей Карно положеніе, безъ котораго она не достигла бы своего современнаго развитія. Это положеніе формулируется такъ:

Дѣйствіе термической машины, превращающей тепло въ работу, должно сопровождаться переходомъ тепла отъ источника высшей температуры къ источнику низшей, т.е. сопровождаться паденіемъ тепла.

Въ каждой термической машинѣ мы различаемъ механизмъ и работающее тѣло. Дѣйствіе термической машины состоитъ въ повтореніи круговыхъ процессовъ, испытываемыхъ работающимъ тѣломъ. Въ концѣ каждаго процесса тѣло находится въ томъ же состояніи, какъ въ началѣ. Простѣйшая форма процесса въ такой машинѣ можетъ быть представлена такъ называемымъ цикломъ Карно.



Работающее тѣло измѣняетъ свое состояніе сначала по изотермѣ АВ, затѣмъ по адіабатѣ ВС, далѣе по изотермѣ СД и адіабатой ДА возвращается въ первоначальное состояніе А. Мы остановимся на случаѣ когда процессъ машины обращаемъ.

Допустимъ что работающее тѣло совершаетъ процессъ въ направленіи часовой стрѣлки; тогда мы имѣемъ машину превращающую тепло въ работу. На изотермѣ АВ тѣло находится въ прикосновеніи съ громаднымъ резервуаромъ R тепла высокой температуры (очагъ) T_1 и беретъ у него тепло q_1, при чемъ вслѣдствіе допущенной громадности резервуара температура послѣдняго не измѣняется. На изотермѣ СД тѣло прикасается съ резервуаромъ R низкой температуры T_2 (холодильникъ), и такъ какъ оно измѣняется, сокращаясь въ объемѣ, то, какъ было раньше указано, оно отдаетъ холодильнику тепло q_2. На адіабатахъ обмѣна тепла нѣтъ. По слѣдствію выведенному нами для замкнутаго цикла изъ перваго закона термодинамики слѣдуетъ, что площадь АВСД представляетъ работу въ которую превратилось тепло $q = q_1 - q_2$.

Количество тепла, взятаго у очага есть $q_1 = q + q_2$. Одна часть его (q) превращена въ работу, а другая (q_2) перенесена въ холодильникъ.

Пусть наша машина работаетъ теперь въ обратномъ направленіи, т. е. противъ движенія часовой стрѣлки. Въ этомъ случаѣ тѣло на изотермѣ DC *беретъ* тепло q_2 и *отдаетъ* на изотермѣ AB тепло q_1; слѣдовательно, обмѣнъ тепла $q_2 - q_1 = -q$ состоитъ въ переносѣ на источникъ высшей температуры тепла q и q_2, ибо $q_1 = q_2 + q$. Тепло q_2 взято у холодильника; тепло же q (см. §6) получено изъ внѣшней работы, принятой тѣломъ и представляемой площадью ABCD, взятой съ минусомъ.

Дадимъ выраженіе начала Карно, придерживаясь формулировки Кирхгофа.

Означимъ черезъ ΔQ_1 тепло, прошедшее теплопроводностью или лучеиспусканіемъ черезъ границу теплаго и холоднаго тѣла. Оно представитъ выигрышъ тепла холоднымъ тѣломъ, если процессы, въ которыхъ участвуетъ система тѣлъ, не производитъ работы. Слѣдовательно ΔQ_1 можетъ быть только положительнымъ или ровнымъ нулю; т.е. $\Delta Q_1 \geqq 0$. Иными словами:

естественное направленіе тепловаго обмѣна не видоизмѣняется пересточной системой тѣлъ, совершающихъ круговой процессъ, не сопровождаемый произведеніемъ внѣшней работы

Предположимъ, что между резервуарами R_1 и R_2 работаютъ двѣ машины.

Тѣла, въ нихъ работающія, различны. Машины подчинены тому условію, чтобы производимая ими работа была одинакова. Эта вторая машина беретъ изъ $R_1 - q_1'$, отдаетъ въ $R_2 - q_2'$; работа $= q_1' - q_2'$. По условію $q_1 - q_2 = q_1' - q_2'$. Положимъ, что вторая машина работаетъ въ направленіи обратномъ: въ результатѣ система обѣихъ машинъ не производитъ работы: именно работа, производимая первой машиною, употребляется на приведеніе въ движеніе второй; эта же послѣдняя превращаетъ принимаемую ею работу въ тепло. Изъ R_1 первая машина взяла q_1, вторая отдала R_1 колич. q_1'; слѣдовательно, тепло, отданное внѣшнимъ тѣламъ источникомъ высшей температуры, есть $\Delta Q_1 = q_1 - q_1'$; по началу Карно $q_1 - q_1' \geqq 0$.

Если перемѣнимъ роли машинъ, то изъ R_1 будетъ взято количество q_1' и отдано ему количество q_1; слѣд.
$\Delta Q_1 = q_1' - q_1$ и, по началу Карно $q_1' - q_1 \geqq 0$. Оба неравенства возможны лишь при $q_1' = q_1$, а слѣдовательно, изъ условія равенства работы и $q_2 = q_2'$, т. е. какія бы машины ни работали между двумя резервуарами R_1 и R_2, количества принимаемаго и отдаваемаго тепла равны, если работы, производимыя машинами, равны.

Если положимъ, что вторая машина совершаетъ работу въ n разъ большую, то она должна выразиться черезъ $n(q_1' - q_2')$ или $nq_1' - nq_2'$, т. е. вторая машина въ этомъ случаѣ возьметъ въ n разъ болѣе тепла и въ n разъ болѣе отдастъ холодильнику. $nq_1' = Q_1$ $nq_2' = Q_2$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{nq_1'}{nq_2'} = \frac{q_1'}{q_2} = Const \ldots\ldots 27.$$

Это коэффиціентъ потери машины. Итакъ

а) *Коэф. потери одинаковъ для всѣхъ обратимыхъ термическихъ машинъ, работающихъ между двумя опредѣленными температурами.*

Если $\frac{Q_1}{Q_2} = const$, то и $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ есть постоянное.

Это есть экономич. коэффиціентъ термической машины.

Итакъ б) *Экономическій коэффиціентъ всѣхъ обратимыхъ*

Лит. общ. вспом. пол. инжр.

машинъ, работающихъ между двумя опредѣленными температурами, одинаковъ.

Тожественныя положенія a и b извѣстны подъ названіемъ теоремы или принципы Карно. Формула этого принципа, данная самимъ Карно, помѣщена въ §7.

§9. Пользуясь принципомъ Карно, мы можемъ установить абсолютную шкалу температуръ, т. е. дать научную основу для опредѣленія температуры тѣла.

Представимъ себѣ рядъ резервуаровъ, расположенныхъ въ такомъ порядкѣ, въ какомъ они производятъ на насъ ослабѣвающее ощущеніе тепла.

$$R_1\ R_2 \dots R_3 \dots\dots R_n$$

$$q_1\ q_2 \dots q_3 \dots\dots q_n$$

Заставимъ какую-нибудь тепловую машину A работать между R_1 и R_2. Изъ R_1 она возьметъ q_1 и въ R_2 отдастъ q_2 тепла. Потомъ заставимъ ее работать между R_1 и R_3 соотв. количества взятаго и отданнаго тепла будутъ q_1 и q_3, и т. д. Такимъ образомъ мы имѣемъ рядъ величинъ $q_1\ q_2\ q_3 \dots q_n$. Между ними существуетъ такое соотношеніе: если заставить машину работать между R_2 и R_3, то если количество взятаго тепла будетъ q_2, то количество отданнаго будетъ q_3 и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, возьмёмъ двѣ машины такого же типа тепла, какъ A, работающія въ противуположныхъ направленіяхъ и соединенныя между собою, одна — между R_1 и R_2, другая между R_1 и R_3. Пусть вторая работаетъ въ прямомъ направленіи. Она превращаетъ тепло $q_1 - q_3$ въ работу; первая часть этой работы превращается въ тепло $q_1 - q_2$. Въ работѣ выиграемъ $q_1 - q_3 - (q_1 - q_2) = q_2 - q_3$. Кромѣ того, вторая машина взяла отъ R_1 количество тепла q_1;

первая же машина принесла R_1 тепло q_2, взятое ею у R_2 и дала R_1 еще изъ работы тепло $q_1 - q_2$, т. е. первая машина вернула R_1 количество тепла $q_2 + (q_1 - q_2) = q_1$, взятое второй машиной. И такъ, въ системѣ нашихъ двухъ машинъ R_1 не играетъ никакой роли.

Но у R_2, какъ сказано, взято q_2, а R_3 отдано q_3, и въ работу превращено $q_2 - q_3$. И такъ, наша составная машина есть термическая машина, работающая между R_2 и R_3 и берущая и отдающая количество тепла q_2 и q_3, что и требовалось доказать. По принципу Карно такимъ свойствомъ будетъ обладать и всякая другая машина, работающая между тѣми же резервуарами.

Такимъ образомъ $q_1\ q_2 \ldots\ q_n$ суть количества тепла взятыя и отданныя машинами при работѣ между соотвѣтствующими резервуарами, слѣд., ими мы можемъ характеризовать температуру источниковъ. Обозначимъ, ихъ черезъ $T_1\ T_2 \ldots\ T_n$. Этотъ рядъ вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣленъ, если заданъ одинъ изъ его членовъ.

Мы знаемъ, что всякая другая машина, работающая между двумя резервуарами R_k и R_m, беретъ и отдаетъ количество тепла Q_k и Q_m, подчиненные условію $\frac{Q_k}{Q_m} = \frac{q_k}{q_m} = \frac{T_k}{T_m}$, т. е. коэффиціентъ потери равенъ отношенію абсолютныхъ температуръ источниковъ. Слѣд. экономическ. коэфф. =

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27a$$

Кромѣ того мы видимъ, что замѣняя машину A другою -В, мы получимъ:

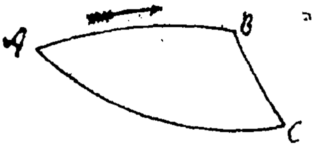
$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : \ldots : Q_n = q_1 : q_2 : q_3 : \ldots\ q_n = T_1 : T_2 : T_3 : \ldots : T_n.$$ Слѣд.

всякая термическая обращаемая машина можетъ служить для опредѣленія интервала температуръ (т. е. отношенія) двухъ резервуаровъ. Эти интервалы являются единственнымъ образомъ опредѣленными. Что же касается до абсолютной цифры, представляющей температуру, то она можетъ быть задана совершенно произвольно для какого-нибудь резервуара; по ней съ помощью интерваловъ опредѣлятся остальные.

§10. Изъ соотношенія $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{T_1}{T_2}$ слѣдуетъ: $\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q}{T_2}=0$. Это соотношеніе выведено нами для термическихъ обращаемыхъ машинъ, работающихъ между двумя опредѣленными температурами. Обобщимъ его.

Пусть тѣло переходитъ изъ состоянія A въ безконечно близкое состояніе B и получаетъ извнѣ теплоту dq.

Пусть кромѣ того совершаются два процесса: изотерм. изъ A, адіабатный изъ B; представляющія ихъ кривыя пересѣкаются въ C. Получаемъ циклъ по стрѣлкѣ: на пути BC пріобр. и отдача 0, на пути CA пусть пріобрѣтается $-dq_1$, на пути AB пріобрѣтается dq; работа, произведенная цикломъ, есть $dq-dq_1$; она выразится площадью ABC; но если всѣ измѣненія безконечно малы, то ABC есть б. малая второго порядка, слѣд., пренебрегая ею, найдемъ $dq-dq_1=0$. или $dq=dq_1$.

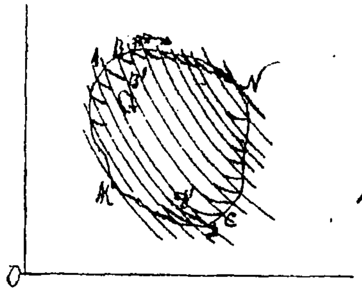


Количество тепла, полученнаго въ безконечно маломъ процессѣ, равно количеству тепла, отданнаго въ соотвѣтственномъ б. маломъ же изотермическомъ процессѣ.

Положимъ, что тѣло проходитъ замкнутый обращаемый циклъ изображаемый контуромъ ABMCDN.

Проведемъ рядъ безконечно близкихъ адіабатъ, которыя встрѣтятъ кривую въ точкахъ A, B, и т. д.

Черезъ эти послѣднія точки проведемъ рядъ изотермъ. Понятно, что весь нашъ циклъ можно замѣнить рядомъ цикловъ по криволинейнымъ четыреугольникамъ, образованнымъ адіабатами и отрѣзками кривой измѣненій. Разсмотримъ одинъ изъ такихъ цикловъ ABCD. На пути AB тѣло получаетъ тепло dq_1, соприкасаясь съ источниками тепла, имѣющими различныя, хотя и безконечно мало разнящіяся другъ отъ друга температуры. Во время процесса температура тѣла измѣняется и эти измѣненія, происходящія отъ измѣненія температуры внѣшней среды*) соприкасается съ безчисленнымъ множествомъ источниковъ различной температуры. На пути CD тѣло отдаетъ dq_2 источникамъ, температуры коихъ тоже различны для различныхъ частей пути CD. Но по только что доказанному измѣненія на AB и CD можно замѣнить перемѣнами по изотермамъ черезъ точки A и C, соотвѣтствующимъ температурамъ T_1 и T_2 въ этихъ точкахъ, причемъ количества dq_1 и dq_2 останутся тѣ же. Но для цикловъ въ родѣ AB'CD' мы можемъ написать



$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{dq_1}{T_1} - \frac{dq_2}{T_2} = 0.$$ или, положивъ

$dq_2 = -dq_2'$, т. е. считая отданное тепло отрицат., находимъ $\frac{dq_1}{T_1} + \frac{dq_2'}{T_2} = 0$. Распространяя на всѣ элементы

---

*) Пропущено: мы можемъ представить себѣ такъ, что въ различныхъ частяхъ своего пути тѣло соприкасается ;....

кривой, т.е. на весь процессъ, находимъ

$$\sum \frac{dq}{T} = 0 \quad \text{или} \quad \int \frac{dq}{T} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; 28$$

Здѣсь T представляетъ температуру внѣшнихъ тѣлъ, играющихъ роль источниковъ. Но температура тѣла безконечно мало разнится отъ внѣшней температуры; означимъ послѣднюю черезъ T, то прежнее T должно быть замѣнено черезъ $T+\varepsilon$ гдѣ ε безконечно мало; тогда

$$\int \frac{dq}{T+\varepsilon} = \int dq \left[\frac{1}{T} - \frac{\varepsilon}{T^2} \right] = \int \frac{dq}{T} - \int \frac{\varepsilon\, dq}{T^2} = 0$$

пренебрегая безконечно малыми, находимъ $\int \frac{dq}{T} = 0$ гдѣ T есть уже температура тѣла.

Прежде чѣмъ указать смыслъ этого выраженія, дадимъ болѣе общій его выводъ. Замѣтимъ, что истолкованіе нашего выраженія представляетъ одну изъ самыхъ трудныхъ задачъ термодинамики.

§ 11. Имѣемъ два источника тепла температуръ T_1 и T_2, причемъ $T_1 > T_2$, настолько обширныхъ, что отнятіе у нихъ тепла работающимъ тѣломъ не мѣняетъ T_1 и T_2. Пусть работающее тѣло испытываетъ необращаемый процессъ: проходитъ извѣстныя измѣненія и возвращается въ начальное состояніе. Тѣло прикасается къ первому резервуару и допустимъ, что его температура T постоянно меньше T_1, т.е. $T < T_1$ и разность $T_1 - T$, по условію, конечна; во второй части пути температура тѣла T' пусть будетъ больше или равной температурѣ источника, т.е. $T \geqq T_2$. Въ первой части пути тѣло получаетъ извнѣ тепло Q_1, во второй части отдаетъ второму резервуару тепло $\bar{Q}_2$. Замѣтимъ, что въ процессѣ T и T^1 не остаются неизмѣнными, а подчиняются только всегда выполненнымъ условіямъ $T_1 > T$, $T^1 > T_2$, что возможно, ибо $T_1 > T_2$. Разность $\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2$ превращена въ механическую работу. Пусть рядомъ съ этой машиной имѣемъ другую-обращаемую, которая изъ источника высшей температуры беретъ тепло Q_1 и второму источнику отдаетъ Q_2; въ работу превращено тепло $Q_1 - Q_2$. Размѣры машины подбираемъ такъ, чтобы $Q_1 - Q_2$ равно было первой тепловой разности, т. е.

$$Q_1 - Q_2 = \bar{Q}_1 - \bar{Q}_2 \qquad \text{отсюда}$$

$$\bar{Q}_1 - Q_1 = \bar{Q}_2 - Q_2 = a$$

Спрашивается теперь, каковъ будетъ знакъ величины a ?. Представимъ себѣ, что вторая машина работаетъ въ обратномъ направленіи, превращая работу первой въ тепло. Тогда въ нашемъ процессѣ мы не имѣемъ произведенія работы. Поэтому, по началу Карно, разность тепла, отданнаго источникомъ высшей температуры и ему возвращеннаго, т. е.

$$\bar{Q}_1 - Q_1 \geqq 0.$$

Это неравенство будетъ понятно, если замѣтимъ, что $\bar{Q}_1$ есть количество тепла, взятаго изъ резервуара при конечной разности температуръ, а Q_1 при безконечно малой. Мы знаемъ, что чѣмъ меньше разность температуръ двухъ тѣлъ, тѣмъ меньше количество переходящаго тепла, поэтому понятно, что Q_1 можетъ быть меньше $\bar{Q}_1$. Итакъ $a \geqq 0$.

Для обращаемой машины было найдено, что

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29a$$

гдѣ T_1 и T_2 суть температуры резервуаровъ: для обращаемаго процесса эти безконечно мало разнятся отъ температуръ тѣла. Разсмотримъ разность

$$\frac{\alpha}{T_1} - \frac{\alpha}{T_2} \quad - \quad - \quad . \quad . \quad 29б$$

Но $T_1 > T_2$, и если $\alpha > 0$ то $\frac{\alpha}{T_1} < \frac{\alpha}{T_2}$, и разность отрицательна. Если $\alpha = 0$, она будетъ нулемъ; итакъ

$$\frac{\alpha}{T_1} - \frac{\alpha}{T_2} \leqq 0$$

Сложивъ почленно формулы 29а-29б, находимъ

$$\frac{Q_1+\alpha}{T_1} - \frac{Q_2+\alpha}{T_2} \leqq 0.$$

или, замѣчая, что $Q_1+\alpha = \bar{Q}_1$ и $Q_2+\alpha = \bar{Q}_2$, найдемъ

$$\frac{\bar{Q}_1}{T_1} - \frac{\bar{Q}_2}{T_2} \leqq 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30$$

Такимъ образомъ вмѣсто равенства (28) можно брать выраженіе (30), имѣющее болѣе общій смыслъ: въ немъ заключаются какъ случай необращаемаго процесса, такъ и обращаемаго; для перваго эта разность < 0, для втораго это нуль.

При выводѣ формулы (30) мы соединяли работающее тѣло только съ двумя источниками температуры, но нужно ввести въ дѣло и не два, а нѣсколько. Имѣемъ рядъ резервуаровъ, положимъ n.

$$R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots R_{n-1}, R_n$$

расположенныхъ въ порядкѣ убывающихъ температуръ

$$T_1, T_2, T_3 \ldots\ldots\ldots T_{n-1}, T_n$$

(Можно, конечно, имѣть и одинъ резервуаръ съ перемѣнной температурой).
Допустимъ, что имѣемъ необращаемую машину M, выполняющую извѣстный замкнутый циклъ, т. е. къ концу процесса приходящую въ начальное состояніе. Заимствованныя количества тепла положительныя или отрицательныя суть

$$Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots\ldots Q_n .$$

Количество тепла, обратившееся въ работу, есть алгебраическая сумма всѣхъ Q. Избытокъ положительныхъ величинъ, положимъ, работу, и наоборотъ. Такъ какъ мы выражаемъ тепло въ единицахъ работы, то работа нашей машины выразится такъ

$$A = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots\ldots Q_{n-1} + Q_n) \ldots\ldots 31.$$

Теперь вообразимъ другую машину m, обращ., и заставимъ ее работать послѣдовательно между R_1 и R_2, потомъ R_2 и R_3 и т. д.; машина совершитъ столько процессовъ, сколько промежутковъ между числами отъ 1 до n, т. е. $n-1$. Пусть наша машина беретъ у $R_1 - q_1$ отдаетъ R_2 количество q_2'; во второмъ циклѣ беретъ у $R_2 - q_2$ и отдаетъ R_3 количество q_3', наконецъ, у R_{n-1} источника машина возьметъ $-q_{n-1}$ тепла и отдаетъ q_n' резервуару R_n.
Подчинимъ работу машины m тому условію, чтобы

$$q_2' + q_2 = Q_2 \quad q_3' + q_3 = Q_3 \quad q_4' + q_4 = Q_4 \ldots\ldots q_{n-1}' + q_{n-1} = Q_{n-1} \ldots\ldots 32.$$

Сейчасъ мы не можемъ сказать, возможны или нѣтъ эти $n-2$ условія, только впослѣдствіи, выписавъ всѣ уравненія вытекающія изъ нашей задачи, и изслѣдуя ихъ, мы рѣшимъ вопросъ о ихъ возможности или невозможности. Затѣмъ подчинимъ нашу машину еще тому условію, чтобы количество ея работы было равно работѣ M, т. е.

$$A=(q_1+q_2'+q_2+q_2'+\dots+q_{n-1}'+q_{n-1}+q_n)=Q_1+Q_2+\dots+Q_{n-1}+Q_n \dots 31a$$

Если m работаетъ въ обратномъ направленіи, то мы имѣемъ лишь переносъ тепла, не сопровождаемый произведеніемъ работы.

Внося въ (31a) выраженіе (32) получимъ

$$q_1+Q_2+Q_3+\dots+Q_{n-1}+q_n=Q_1+Q_2+Q_3+\dots+Q_{n-1}+Q_n$$

и по сокращеніи:

$$Q_1-q_1+Q_n-q_n=0 \dots\dots\dots\dots 33$$

$Q_1-q_1=$

Прибавивъ къ условіямъ 32 выраженіе 33, имѣемъ $n-2+1=n-1$ уравненій; кромѣ того, такъ какъ всѣ циклы машины m между R_1 и R_2; R_2 и R_3 и т. д. суть обращаемые, то

$$\begin{aligned} &\frac{q_1}{T_1}+\frac{q_2'}{T_2}=0. \\ &\frac{q_2'}{T_2}+\frac{q_3}{T_3}=0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\frac{q_{n-1}}{T_{n-1}}+\frac{q_n}{T_n}=0 \end{aligned} \qquad \dots\dots\dots\dots 34.$$

всего n-1 условій; которыя въ соединеніи съ n-1 условіями 32 и 33 дадутъ все необходимое для опредѣленія 2n-2 величины q и q', которыя и служатъ единственными характеристиками цикловъ машины m. Разъ всѣ эти q найдены, циклы вполнѣ опредѣлены, другими словами условія 32 вполнѣ возможны. Сложимъ всѣ уравненія 34.

$$\frac{q_1'}{T_1} + \frac{q_2'+q_2}{T_2} + \frac{q_3'+q_3}{T_3} + \dots + \frac{q_{n-1}'+q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{q_n}{T_n} = 0$$ или

$$\frac{q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \dots \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{q_n}{T_n} = 0.$$

Мы видимъ, что для симметріи этихъ выраженій недостаетъ членовъ $\frac{Q_1}{T_1}$ и $\frac{Q_n}{T_n}$ и оказыв. лишними ~~лишнихъ~~ $\frac{q_1}{T_1}$ и $\frac{q_n}{T_n}$; поэтому прибавимъ къ обѣимъ частямъ по

$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$, а $\frac{q_1}{T}$ и $\frac{q_n}{T_n}$ перепишемъ

во вторую часть:

$$\sum \frac{Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{q_1}{T_1} + \frac{Q_n}{T_n} - \frac{q_n}{T_n}$$

$$\sum \frac{Q}{T} = \frac{Q_1 - q_1}{T_1} - \frac{q - Q_n}{T_n}$$

или, принимая во вниманіе формулу 33

$$\sum \frac{Q}{T} = (Q_1 - q_1)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_n}\right)$$

По условію $T_1 > T_n$ слѣд. $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_n} < 0$. Съ другой стороны представляя себѣ, что наша обращаемая машина m работаетъ въ обратномъ направленіи, т. е. превращаетъ работу машины и въ тепло, то мы получимъ процессъ, въ которомъ работа не производится, а $Q_1 - q_1$ представ. разность тепла отданнаго и принятаго источникомъ высшей температуры. По началу Карно $Q_1 - q_1 \geqq 0$. Это неравенство опять понятно, если замѣтимъ, что Q_1 есть количество тепла, перешедшаго изъ одн. тѣла въ другое при конечной разности температуры, а q_1 при безконечно малой. Итак вообще

$$\sum \frac{Q}{T} \leqq 0$$

или если источниковъ безконечно много, т. е. температура внѣшней среды мѣняется непрерывно

$$\int \frac{dq}{T} \leqq 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35.$$

Величину $\frac{Q}{T}$ Clausius назовемъ Verwandlungswerth der Wärme; мы назовемъ ее приведенной теплотой. Итакъ, въ тепловыхъ процессахъ играетъ роль не абсолютная, а приведенная теплота. Сумма всѣхъ теплотъ, отданныхъ и принятыхъ тѣломъ, назыв. тепловымъ обмѣномъ; $\Sigma \frac{Q}{T}$ назовемъ приведеннымъ тепловымъ обмѣномъ. Замѣтимъ, что T въ этомъ выраженіи представляетъ температуру резервуаровъ, а не температуру тѣлъ работающихъ машинъ, и исключеніе составляютъ только обращаемые процессы. Итакъ, для замкнутаго цикла перемѣнъ, сопровождаемаго превращеніемъ тепла въ работу, приведенный тепловой обмѣнъ меньше или равенъ нулю. Такъ формулируется второй законъ термодинамики. Съ другими его выраженіями ознакомимся далѣе.

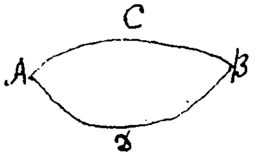
§12. Выше было найдено, что для замкнутаго обр. процесса

$$\int (dQ + dW) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 16 \text{ (стр. 24.)}$$

Мы заключимъ отсюда, что существуетъ функція U, зависящая только отъ даннаго состоянія тѣла, причемъ

$$dU = dQ + dW \qquad (I)$$

есть точный дифференціалъ. Измѣненіе функціи U, названной нами энергіей тѣла, при его переходѣ изъ состоянія A въ состояніе B оказалось независящимъ отъ характера процессовъ, по которымъ переходъ совершается.



Совершенно такимъ же путемъ, но только для обращаемыхъ процессовъ, мы находимъ изъ условія: $\int \frac{dQ}{T} = 0$ взятый по пути ABCD, который предполагается теперь обращаемымъ, что

$$\int\limits_{(ACB)} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{(BDA)} \frac{dQ}{T} = 0$$

откуда

$$\int\limits_{ACB} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{ADB} \frac{dQ}{T} \qquad \text{т. е.}$$

что приведенный тепловой обмѣнъ не зависитъ отъ характера обращаемого процесса, а только отъ начальнаго и конечнаго состояній тѣла. Слѣдовательно, кромѣ энергіи существуетъ еще другая функція S, зависящая только отъ даннаго состоянія тѣла, причемъ

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \underline{II}$$

гдѣ dS есть точный дифференціалъ. Эта функція S наз. <u>энтропіей</u> (что значитъ — превращеніе). Увеличеніе энтропіи ($dS=+$) въ обращаемомъ процессѣ возможно при $dQ=+$, т. е. при подведеніи тепла.

IV. Основныя ур-ія термодинамики.

§13. Итакъ, $U_1-U_0=\int(dQ+dW)$ (I bis)

$$S_1-S_0=\int\frac{dQ}{T} \quad (\text{II bis})$$

Уравненія (I) и (I bis) примѣнимы ко всѣмъ процессамъ; уравненія (II) и (II bis) только къ обращаемымъ.

Всѣ наши выраженія представлены въ единицахъ работы. Мы могли бы величины Q, U, S, выражать и въ калоріяхъ; тогда въ предыдущихъ ур-іяхъ а работу нужно было бы тоже выразить въ единицахъ тепла, т. е. вмѣсто dW написать $\frac{1}{\varepsilon}dW$ гдѣ ε есть механ. эквив. тепла.

Приведенныя ур-ія суть основные въ термодинамикѣ и представляютъ аналогическое выраженіе обоихъ законовъ термодинамики, при чемъ второй для обращаемыхъ процессовъ.

Количество тепла dQ можетъ быть точнымъ дифференціаломъ лишь для изотермическаго процесса, когда $T=\text{const}$, что слѣдуетъ изъ ур-ія $dQ=TdS$ .... (II)

Мы знаемъ, что если p и v суть перемѣнныя, вполнѣ опредѣляющія состояніе, то $dW=-pdv$; слѣдовательно,

$$dU=dQ-pdv \quad \dots\dots\dots \quad 25$$

Обмѣнъ тепла dQ зависитъ отъ измѣненія p и v, поэтому:

$$dQ = X\,dp + Y\,dv$$

гдѣ $$X = f_1(p, v) \quad Y = f_2(p, v)$$

$$dQ = X\,dp + Y\,dv$$

$$\underline{dU = X\,dp + (Y-p)\,dv}$$

Мы знаемъ, что dU есть полный дифференціалъ, т. е.

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial (Y-p)}{\partial p}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial p} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 36$$

Съ другой стороны, если бы dQ было точнымъ дифференціаломъ, то имѣли бы:

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Y}{\partial p}$$

что не совмѣстимо съ формулой 36; слѣд. dQ не есть точный дифференціалъ.

Такъ какъ dS интегрируется, то $\frac{1}{T}$ есть интегрирующій множитель выраженія dQ

Если бы dQ было точнымъ дифференціаломъ, т. е. Q опредѣлялось бы вполнѣ мгновеннымъ состояніемъ тѣла, то всякій замкнутый циклъ давалъ бы работу, равную нулю, и мы не имѣли бы превращенія тепла въ работу;

въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія

$$dU = dQ + dW$$

мы нашли бы $\int_A^A dU = \int_A^A dQ + \int_A^A dW$, т.е. $W = 0$.

что вообще быть не можетъ. Такой результатъ возможенъ въ томъ лишь случаѣ, когда обѣ части цикла сливаются, т.е. тѣло въ обратномъ процессѣ проходитъ тѣ же состоянія, что и въ прямомъ.

Такъ какъ количество тепла, сообщеннаго тѣлу, не опредѣляется начальнымъ и конечнымъ состояніемъ тѣла, а зависитъ отъ хода процесса, испытаннаго тѣломъ, то мы не можемъ говорить о количествѣ тепла, содержащагося въ тѣлѣ. Мы можемъ говорить о теплѣ, сообщенномъ тѣлу не вообще, а только въ опредѣленномъ указываемомъ процессѣ.

§ 14. Разберемъ нѣкоторые частные процессы. Во-первыхъ, положимъ $U = const$ $dU = 0$

$$0 = dQ + dW$$

$$dQ = -dW$$

Такой процессъ называется изодинамическимъ.

Во-вторыхъ $S = const$ $dS = 0$ и $dQ = 0$, т.е. не происходитъ обмѣна тепла — процессъ адіабатный; внѣшняя работа идетъ на измѣненіе внутрен. энергіи и обратно $du = dW$.

Такой процессъ называютъ также изэнтропичнымъ.

Укажемъ еще въ нѣсколькихъ словахъ пріемы, вытекающ изъ основныхъ ур-ій термодинамики, дающіе возможность раскрывать свойства тѣлъ или процессовъ, въ которыхъ они участвуютъ.

Пусть $dL = Xdx + Ydy$

$$dW = Adx + Bdy$$

гдѣ x и y суть перемѣнныя, опредѣляющія состояніе тѣла, а X, Y, A и B ихъ функціи; тогда

$$dU = (X + A)\,dx + (Y + B)\,dy$$

$$dS = \frac{X}{T}\,dx + \frac{Y}{T}\,dy$$

По свойству dU и dS, имѣемъ

$$\frac{\partial}{\partial y}(X + A) = \frac{\partial}{\partial x}(Y + B)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{T}\right)$$

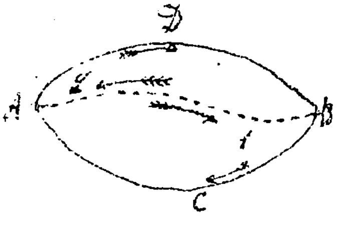
т.е. мы имѣемъ двѣ дифференціальныхъ выраженія, которыя указываютъ на общія соотношенія между X, Y и A, B и даютъ возможность по свойствамъ однихъ заключить о свойствахъ другой группы.

Подобные пріемы весьма нерѣдки въ термодинамикѣ.

§.15. Представимъ себѣ уединенную систему тѣлъ, въ которой происходятъ процессы необратимые, но при этомъ состояніи.

изъ такихъ состояній, въ которыхъ система можетъ быть приводима процессами обращаемыми, хотя и при помощи внѣшнихъ силъ. Напримѣръ, бросая кусокъ соли въ воду, мы получаемъ раствореніе этой соли въ водѣ; извлечь эту соль изъ раствора, воспроизводя въ обратномъ порядкѣ ходъ подобнаго растворенія, мы не можемъ.

Но совершенно такой же растворъ мы можемъ получить процессомъ обращаемымъ: а именно, обращаемъ чистую воду въ паръ, очень разряженный, и этотъ паръ приводимъ въ прикосновеніе съ солью; затѣмъ, увеличивая постепенно давленіе, мы конденсируемъ паръ, пока не получимъ желаемого раствора; такой процессъ, повторенный въ обратномъ порядкѣ, имѣетъ возможность извлечь соль изъ раствора. Положимъ еще, что тѣло подъ дѣйствіемъ тяжести скользитъ съ треніемъ по наклонной плоскости внизъ; такой процессъ необращаемъ: но мы можемъ то же самое тѣло внѣшнею силою поднять съ наклонной плоскости и перенести во всякое новое положеніе внизъ или обратно наверхъ. Итакъ, всякій необращаемый процессъ, происходящій въ системѣ уединенной, мы можемъ дѣлать обращаемымъ (при помощи дѣйствія уже внѣшнихъ тѣлъ) и притомъ такъ, что система во-1) опишетъ замкнутый циклъ превращеній и вернется въ свое начальное состояніе, во-2) этотъ циклъ будетъ сопровождаться произведеніемъ внѣшней работы. т. е. происходитъ въ направленіи движенія часовой стрѣлки. Осуществленіе послѣдняго условія всегда возможно. Положимъ, напр., что пунктированная линія представляетъ необращаемый процессъ. Если онъ совершается по др.



лку 1, то мы замкнемъ его обращаемымъ процессомъ ВСА. Если же онъ совершается по стрѣлкѣ 2, то мы замкнемъ его обращаемымъ процессомъ АДВ.

Въ первомъ случаѣ начальное состоянiе (0) системы есть А, а конечное (1) есть В; во второмъ – наоборотъ.

Для всего цикла $\int \frac{dQ}{T} \leqq 0$ но

интегралы S_0 и S_1 [illegible] Начало [illegible] процессы А и В [illegible] далее [illegible]

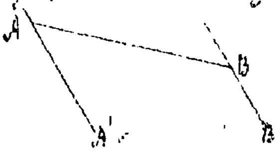
$$\int \frac{dQ}{T} = \int_0^1 \frac{dQ}{T_{необр.}} + \int_1^0 \frac{dQ}{T_{обр.}}$$

$$\int_1^0 \frac{dQ}{T_{обр.}} = S_0 - S_1 \quad слѣд. \quad \int \frac{dQ}{T} = \int_0^1 \frac{dQ}{T_{необр.}} + S_0 - S_1 \leqq 0 \; \ldots \ldots$$

но въ процессѣ необращаемомъ наша система изолирована; слѣд. $dQ = 0$. Итакъ $S_0 - S_1 \leqq 0$ или $S_1 \geqq S_0$. Слѣд. <u>необращаемый процессъ въ изолированной системѣ можетъ происходить въ такомъ направленiи, при которомъ энтропiя системы возрастаетъ.</u> Такой процессъ, по условiю, происходитъ безъ дѣйствiя внѣшнихъ силъ: это есть, слѣдовательно, процессъ естественный, самъ собою возникающiй и происходящiй въ системѣ. Такiе процессы мы можемъ назвать <u>самопроизвольными</u>. Слѣдовательно, <u>естественные или самопроизвольные процессы происходятъ только въ томъ направленiи, при которомъ энтропiя возрастаетъ.</u>

Поэтому изъ двухъ направленiй необращаемаго процесса, нами предположенныхъ (АВ или ВА) возможно только одно.

Представимъ себѣ какой либо изотермическiй процессъ. Изъ выраженiя $dQ = TdS$ заключаемъ, что тѣло принимаетъ тепло не повышая въ температуры: въ изотермическомъ процессѣ притокъ тепла пропорцiоналенъ измѣненiю энтропiи. На этомъ можно основать



измѣренiе послѣдней. Положимъ, что начальный и конечный пункты нашего изотермическаго процесса суть А и В. Проведемъ черезъ эти точки адіабаты. Для этихъ кривыхъ S = const. именно для AA' равно S_0 для BB' — S_1, dQ для нихъ = 0, а dT тоже нуль для кривой AB, т. е. T есть const.

$$dQ = TdS$$

$$Q_0' = T(S_1 - S_0) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 38$$

Изъ этого выраженія опредѣлится измѣненіе энтропіи.

Разсматривая вселенную, какъ уединенную систему (мы не знаемъ, что такое вселенная) Clausius естественно пришелъ къ выводу, что естественные процессы, происходящіе въ природѣ, въ своей совокупности увеличиваютъ ея энтропію. Поэтому Clausius формулируетъ основные законы термодинамики въ примѣненіи къ вселенной такъ:

I. Энергія вселенной неизмѣнна.

II. Энтропія вселенной стремится къ maximum'у.

Стремленіе естественныхъ процессовъ совершаться въ направленіи возрастанія энтропіи даетъ указанія при рѣшеніи ряда вопросовъ, касающихся химическихъ взаимодѣйствій.

§. 16. Выше было найдено, что для всякого процесса

$$\int \frac{dQ}{T} = \int_0^1 \frac{dQ}{T_{необр.}} + S_0 - S_1 \leqq 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 37.$$

что для уединенной системы дало возможность вывести формулу $S_1 \geqq S_0$.

Положимъ теперь, что наша система не уединена, т. е. $dQ \neq 0$, кромѣ того условимся, что температура среды безконечно мало разнится отъ температ. системы, что тоже имѣетъ мѣсто и для давленія, при чемъ и температуры и давленія одинаковы въ различныхъ частяхъ системы. Но этотъ процессъ является необратимымъ благодаря вліянію иныхъ обстоятельствъ. Вслѣдствіе постановленнаго выше условія относительно p и T мы можемъ написать, что $dW = -p\,dv$ и $dU = dQ - p\,dv$ или $dQ = dU + p\,dv$. Вводя это dQ въ формулу 37 получимъ

$$\int_0^1 \frac{dU + p\,dv}{T} + S_0 - S_1 \leqq 0.$$

1) Положимъ, что $U = \text{const}$ и $v = \text{const}$; тогда $S_0 - S_1 \leqq 0$ или $S_1 \geqq S_0$, т. е. энтропія при такомъ процессѣ повышается.
2). $S = \text{const}$, $v = \text{const}$, $S_0 = S_1$ и $dv = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dU}{T} \leqq 0$$

энергія убываетъ для безконечно малаго процесса.
3) $T = \text{const}$ $v = \text{const}$

$$\int_0^1 \frac{dU}{T} + S_0 - S_1 \leqq 0$$

$$U_1 - U_0 + T S_0 - S_1 T \leqq 0$$ или

$$U_1 - S_1 T \leqq U_0 - S_0 T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 39$$

т. е. въ такомъ процессѣ нѣкоторая функція $F = U - ST$ постоянно убываетъ. Она назыв. термодинамическимъ потенціаломъ при постоянномъ объемѣ. Helmholtz называетъ эту функцію свободной энергіей.
4) $T = \text{const}$ $p = \text{const}$

$$\int_0^1 \left(\frac{U+pv}{T}\right) + S_0 - S_1 \leqq 0$$

$$U_1 + pv_1 - S_1 T \leqq (U + pv - TS)_0 \quad \ldots\ldots 40$$

Функція $U + pv - ST$ убываетъ; она наз. термодинамическимъ потенціаломъ при постоянномъ давленіи.

Таковы четыре случая второго принципа, изъ коихъ каждое можетъ быть разсматриваемо какъ его выраженіе.

V. Термодинамика совершенныхъ газовъ.

§17 Идеальными или совершенными газами назыв. подчиненные слѣдующимъ законамъ. (Дѣйствительные газы слѣдуютъ имъ или приближенно, или въ извѣстныхъ предѣлахъ)

1) Закону Маріотта-Гей-Люссака или Шарля и Бойля. Онъ выражается формулой.

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots 41(a)$$

Мы будемъ разсматривать массу газа, равную одному килограмму. Вынесемъ въ формулѣ (41a) α за скобку

$$pv = \alpha . p_0 . v_0 \left(\frac{1}{\alpha} + t\right)$$

α одинаково для всѣхъ газовъ и равно $\frac{1}{273}$, слѣд. $pv = \alpha p_0 v_0 (273 + t)$

Положимъ $273 + t = T$, не соединяя пока съ T никакихъ представленій объ абсолютной температурѣ. Тогда

$$pv = p_0 v_0 \alpha T$$

$$pv = R . T \quad \ldots\ldots 41б$$

гдѣ $R = \alpha p_0 v_0$. Если γ есть масса одного кубическаго метра газа, выраженная въ килогр.-массахъ при нѣкоторыхъ начальныхъ p_0 и T_0, то выражая объемы въ кубическихъ метрахъ, имѣемъ $v_0 \gamma = 1$ (т.е. массѣ одного килограмма); откуда $v_0 = \frac{1}{\gamma}$.

Итакъ

$$R = \alpha p_0 v_0 = \frac{\alpha p_0}{\gamma} \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (\alpha)$$

За единицу давленія принимаемъ давленіе равное 1 кило на 1 квадр. метръ. Давленіе p_0, соотвѣтствующее атмосферному въ 760 ^{mm} ртут. будетъ 10332 кило на 1 квадр. метръ.

Для воздуха $\gamma_1 = 1,2933$. при 760 ^{mm} и 0°.

Слѣдовательно для воздуха $R_1 = \frac{\alpha p_0}{\gamma_1} = \frac{1}{273} \cdot \frac{10332}{1,2933} = 29,272$

Называя плотность другого газа по отношенію къ воздуху, черезъ ε, можемъ написать

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \varepsilon; \gamma = \gamma_1 \varepsilon \quad \text{- - - - - -} \quad (\beta)$$

$$\text{и } R = \frac{\alpha p_0}{\gamma_1 \cdot \varepsilon} = \frac{R_1}{\varepsilon} \quad \text{- - - - - -} \quad (\gamma)$$

Эта формула даетъ R черезъ R_1 и ε. Выпишемъ значенія R и ε для нѣкоторыхъ газовъ. Для

азотъ $R_N = 30,134$ $\varepsilon_N \begin{cases} 0.97137 \\ 0.97200 \end{cases}$

кислородъ $R_O = 26,475$ ε_O 1.0563

водородъ $R_H = 422,612$ ε_H 0.06906

Извѣстно, что массы газовъ, пропорціональныя молекулярнымъ вѣсамъ, занимаютъ одинаковые объемы (Авогадро) при одинаковыхъ условіяхъ относительно температуры и давленія; массу газа, равную столькимъ килограм-массамъ, сколько единицъ содержитъ частичный вѣсъ газа, наз. <u>килограммолекулой</u> газа. 2 кгр. водорода, 28 килогр. азота, 32 квадр. кислорода, 71 кгр. хлора и пр. будетъ килограммолекулы соотвѣтственныхъ газовъ. Они занимаютъ равные объемы. Объемъ, общій всѣмъ килограммолекуламъ при 0° и 760 ^{mm}, есть 22,38 куб. метра. Если формулу закона Маріотта и Гей-Люесли мы будемъ писать для килограммолекулы каждаго газа, то v_0 будетъ для всѣхъ одинаково, также и p_0, а потому $R = \alpha p_0 v_0$ будетъ при этомъ условіи одинаковымъ для всѣхъ газовъ. Чтобы найти его, достаточно вычислить новое R для одного газа, напр. для водорода. Въ килограммолекулѣ водорода содержится вдвое большая масса, чѣмъ при нашемъ прежнемъ предположеніи, а потому и объемъ v_0 килограммолекулы вдвое больше прежняго v_0, представлявшаго объемъ 1 кило водорода. Но R пропорціонально v_0, а потому новое R, одинаковое для всѣхъ газовъ, будетъ:

$$R = R'_H = 2R_H = 2.422,612 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (8)$$

Но величина 422,612 близка къ механическому эквиваленту теплоты; слѣд., можно сказать, что $R'_H = 2E$ или, вообще,

$$pv = R'.T = 845,2.T \text{ или приближенно:}$$

$$pv = 2ET \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 41c$$

Такъ можетъ быть представленъ первый законъ, которому повинуются идеальные газы.

Нѣкоторые авторы разсматриваютъ не килограммолекулу газа, а граммолекулу; послѣдняя носитъ еще названіе „Mol“. Она въ 1000 разъ меньше килограммолекулы; поэтому R нужно уменьшить въ 1000 разъ. Итакъ

$$pv = 0,8452.T$$

Далѣе, давленіе считается въ атмосферахъ, слѣд. $p \doteq \frac{p}{10332}$ и объемъ въ литрахъ, слѣд. $v \doteq 1000v$; ибо цифра, представляющая одинъ и тотъ же объемъ, будетъ въ 1000 разъ больше въ литрахъ чѣмъ въ кубическихъ метрахъ.

Итакъ вставляя въ формулу p и v, получимъ:

$$\frac{10332}{1000} p'v' = 0,8452\,T, \text{ или } p'v' = 0,0818\,T$$

При вычисленіи работы, совершаемой газомъ, кромѣ килограмметра и другихъ единицъ работы, употребляется еще единица, наз. метръ-атмосферой. Это есть работа, затрачиваемая на побѣжденіе давленія атмосферы, дѣйствующаго на 1 квадратный дециметръ (напр. на поршень въ цилиндрѣ, имѣющемъ 1 кв. дециметръ поперечнаго сѣченія), на протяженіи 1 дециметра.

При этомъ объемъ увеличивается на 1 литръ. Такъ какъ давленіе атмосферы на 1 кв. дециметръ = 103,32 клгр. и 1 децим = $\frac{1}{10}$ метра, то 1 литръ - атмосфера = 103,32 × $\frac{1}{10}$ = 10,33 килограмметра.

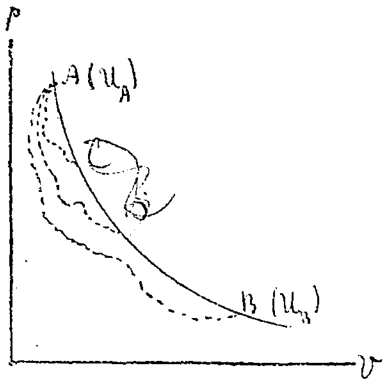
§ 18. Второй законъ есть законъ Джоуля: Если газъ расширяется не производя внѣшней работы и въ конечномъ состояніи имѣетъ температуру какъ въ начальномъ, то нѣтъ ни выдѣленія, ни поглощенія тепла.

Джоуль бралъ два совершенно равныхъ сосуда, одинъ пустой, другой наполненный газомъ сжатымъ до 22 атм. Все погружалось въ калориметръ. Когда кранъ открывали, газъ переходилъ въ первый сосудъ и занималъ двойной объемъ; упругость его становилась 11^{atm}, но въ калориметрѣ никакого измѣненія температуры не наблюдалось.

Примѣнимъ сюда нашу формулу: $dQ = dU - dW$. Количество тепла, полученнаго или отданнаго тѣломъ на пути изъ состоянія A въ B, выразится такъ

$$Q_A^B = U_A^B - W_A^B$$

Въ нашемъ случаѣ $Q_A^B = 0$, $W_A^B = 0$, слѣд. $U_A^B = 0$, т.е. измѣненія внутренней энергіи также не происходитъ. Представимъ себѣ діаграмму измѣненій состояній тѣла и на ней изотерму, которая, какъ извѣстно, будетъ равносторонней гиперболой (ибо при $T = const$ будетъ $pv = const$). Пусть въ началѣ опыта газъ имѣетъ состояніе изображаемое точкой A на изотермѣ. Затѣмъ произошелъ процессъ Джоуля - необратимый, но закончившійся тою же температурой T. Процессъ газа изобразимъ пунктированной (въ отличіе отъ обратимаго) линіей изъ A въ B. B должно находиться на нашей изотермѣ. Энергія какъ въ A такъ и въ B одинакова. $U_A = U_B$.



Подбирая соотвѣтственно другой пустой сосудъ, можемъ заставить газъ совершать процессы AC, AD, AE и т. д. Всякій разъ конечная точка процесса должна быть на изотермѣ и мы можемъ написать $U_A = U_B = U_C = U_D$ и т. д.

Поэтому изотермическій процессъ газа совпадаетъ съ изодинамическимъ: другими словами, при постоянной температурѣ процессъ совершается такъ, что внутренняя энергія не мѣняется.

§19. Различаютъ удѣльную теплоту газа при постоянномъ объемѣ C_v и при постоянномъ давленіи C_p. По опытамъ Реньо C_p не зависитъ отъ давленія и температуры въ широкихъ предѣлахъ для водорода, воздуха, кислорода и азота. Раздѣляя удѣльную теплоту C_p на удѣльный объемъ при 0° и 760 mm. (т. е. на объемъ единицы массы), мы получимъ удѣльную теплоту, отнесенную не къ 1 массы, а къ 1 объема, такъ назыв. объемную теплоемкость при постоянномъ давленіи. Ее легко найти для температуры 0° и давленія 760 mm. Именно, объемная теплоемкость есть

$$\overline{\omega} = \frac{C_p}{v_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 42$$

но мы видѣли выше, что $\frac{1}{v_0} = \gamma$, слѣд. $\overline{\omega} = C_p \times \gamma$

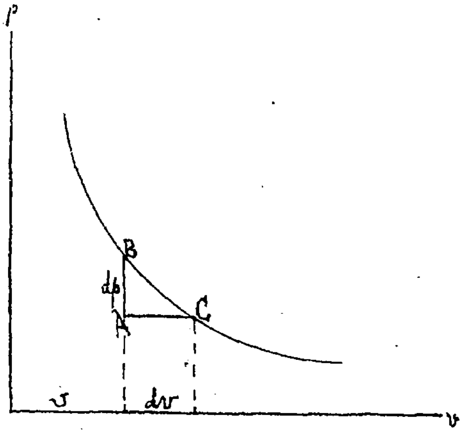
Такимъ образомъ по данымъ, помѣщеннымъ въ нижеприведенной таблицѣ, вычисляется $\overline{\omega}$ для различныхъ газовъ. Въ этой таблицѣ теплоемкости выражены въ килограмкалоріяхъ или большихъ калоріяхъ.

	$\gamma \times$	$C_p = \frac{C_p}{v}$	$= \overline{\omega}$
H	0,08957	3.4090	0,305
O	1,42980	0.21751	0.311
N	1,25616	0.24380	0.306
CO_2	1,97741	0.18700	0.370

Мы видимъ отсюда, что для газовъ, наиболѣе удаленныхъ отъ состоянія сжиженія, объемная теплоемкость при постоянномъ давленіи можетъ считаться одинаковою.

§ 20. Приступимъ теперь къ изученію термодинамики явленій въ газахъ.

Дана діаграмма, на которой состояніе газа опредѣлено точкой A. Изъ этого состоянія, сохраняя неизмѣннымъ v, переведемъ газъ въ другое безконечно близкое — B. Для этого нужно подвести къ нему извѣстное количество тепла. Если C_v теплоемкость газа при постоянномъ объемѣ, dT приращеніе температуры на пути AB, то это количество тепла есть $C_v \cdot dT$. Изъ B газъ пусть идетъ по изотермѣ въ состояніе C (C есть точка пересѣченія изотермы и линіи проходящей черезъ A // Ox). Здѣсь газъ получаетъ нѣкоторое количество тепла $+dq$. Изъ C газъ переходитъ въ A по прямой AC — отдавая тепло.



Измѣненіе температуры опять $= dT$ и отданное тепло есть $C_p\,dT$. Слѣд., работа нашего цикла есть $C_v\,dT + dq - C_p\,dT$. Она выразится площадью треугольн. ABC, равной $\frac{1}{2}\,dp.\,dv$. Пренебрегая величиной $\frac{1}{2}\,dp.\,dv$, какъ безконечно-малой второго порядка, имѣемъ

$$C_v\,dT + dq_1 - C_p\,dT = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 43.$$

Мы знаемъ, что вообще

$$dq_1' = dU + p\,dv,$$

для изотермическаго процесса оно обратится въ $dq_1' = p\,dv$ ибо $dU = 0$. Здѣсь dq_1' выражено въ единицахъ работы, слѣд.

$$dq_1 = \frac{dq_1'}{E} = \frac{p\,dv}{E}$$

гдѣ E есть механическій эквивалентъ одной килограмкалоріи. Представивъ въ соотношеніе (43) вмѣсто dq_1 его выраженіе, находимъ

$$C_v\,dT + \frac{p\,dv}{E} - C_p\,dT = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 43.(a)$$

Выразимъ здѣсь dv черезъ dT. По закону Шарля-Бойля

$$pv = R.T.$$

dv которое, мы желаемъ опредѣлить, представляетъ разность объемовъ въ B и C; она та же, что разность объемовъ въ A и C въ процессѣ AC, называемомъ изопіестическимъ. Потому искомое dv найдется дифференцированiемъ ур-iя Шарля и Байля въ предположенiи неизмѣннаго p и измѣняющагося T, т. е.

$$p\,dv = R\,dT$$

$$C_v\,dT + \frac{R}{E}\,dT = C_p\,dT = 0 \qquad \text{или}$$

$$\frac{C_p - C_v}{R} = \frac{1}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 44.$$

Эта формула даетъ обратную величину механическаго эквивалента теплоты.

Выраженiе (44) легко приводится къ виду (см. §17. (α)) :

$$\frac{1}{E} = \frac{C_p - C_v}{\alpha p_0 v_0}$$

§21. Предыдущая величина должна быть одинакова для всѣхъ идеальныхъ газовъ. Такъ какъ α для всѣхъ газовъ одинакова (берутся они при томъ же начальномъ давленiи т.е. $p_0 = \mathrm{Const}$) то $\frac{C_p - C_v}{V_0} = \mathrm{const}$ для идеальныхъ газовъ. По опытамъ Реньо C_p не зависитъ отъ температуры и давленiя, а потому и C_v не должно отъ нихъ зависѣть. Можемъ написать:

$$\frac{C_p}{V_0} - \frac{C_v}{V_0} = \mathrm{const} = \frac{C_p'}{V_0'} - \frac{C_v'}{V_0'} = \frac{C_p''}{V_0''} - \frac{C_v''}{V_0''} \quad \text{и т. д.}$$

Но по Реньо

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{C_p}{V_0} = \dfrac{C_p'}{V_0'} = \ldots\ldots\ldots = \mathrm{const}. \\[2ex] \text{Слѣдовательно} \quad \dfrac{C_v}{V_0} = \dfrac{C_v'}{V_0'} = \ldots\ldots\ldots = \mathrm{Const} \end{array}\right\} \ldots\ 45$$

Раздѣливъ уравненія 45 одно на другое, находимъ

$$\frac{C_p}{C_v} = k = Const. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 46$$

Поэтому достаточно найти k для одного газа, чтобы знать его для другихъ, слѣдующихъ закону Реньо.

Найдено $k = 1,41$ 47

Изъ формулъ 44 и 47 а можно опредѣлить ε, т. е. механическій эквивалентъ одной килограмкалоріи, зная C_p; именно.

$$\varepsilon = 423,6^{kg/mtr.}$$

Отсюда механическій эквивалентъ одной грамкалоріи /малой калоріи/ есть $\varepsilon' = 4,156 . 10^7$ эрговъ или 4,156 джаулей.

Формулу 44 можно представить иначе.

Такъ какъ одна kg. калорія эквивалента ε единицамъ работы или ε^{kgm}, то $1^{kgm} = \frac{1}{\varepsilon}$ килограммъ-калорій. Эту долю килограммъ-калоріи можно принять за единицу тепла, эквивалентную 1 работы. Ее называютъ терміей.

Обозначивъ черезъ C_p теплоемкость въ терміяхъ. Она представитъ содержаніе терміи въ теплоемкости c_p, выраженной въ калоріяхъ, т. е. $C_p = c_p : \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $c_p \varepsilon = C_p$, точно также $c_v \varepsilon = C_v$ и формула 44 перепишется такъ

$$C_p - C_v = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44a)$$

Формула 44 прилагалась къ массѣ газа въ одинъ килограммъ. Будемъ считать ее примѣненной къ килограммъ-молекуламъ газовъ. Тогда C_p и C_v будутъ количества теплоты, которыя нужно сообщить килограм-молекулѣ, чтобы повысить ея температуру на 1°, это будутъ молекулярныя теплоемкости. Тогда въ формулѣ 44 $R = 2\varepsilon$, и мы имѣемъ

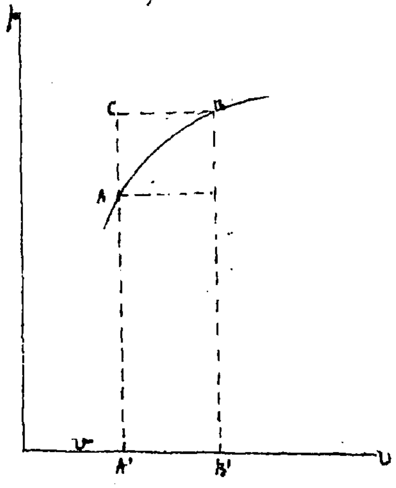
$$c_p - c_v = 2$$

т. е. разность молекулярныхъ теплоемкостей при постоянномъ давленіи и постоянномъ объемѣ = всегда 2 большимъ калоріямъ.

Приведемъ числовыя данныя для O и N (они получаются умноженіемъ ед. теплоты c_p на массу килограммолекулы)

	Мол. мас.	C_p	C_v	
O_2	32 klgrm	6,96	4,96	
N_2	28 klgm	6,83	4,83	и т. д.

§ 22. Постараемся теперь установить общее ур. для какого угодно процесса, происходящего въ газѣ. Пусть газъ участвуетъ въ какомъ-либо процессѣ, переходя изъ состоянія A въ состояніе B. Этотъ переходъ можно сдѣлать инымъ путемъ: сначала въ C, не мѣняя объема, потомъ въ B, не мѣняя давленія.



Площадь элементарнаго Δ ABC представитъ разность теплотъ, полученныхъ и отданныхъ газомъ въ замкнутомъ циклѣ ACBA. Эту разность, какъ безконечно малую 2^го^ порядка, можно принять равною нулю; слѣд. процессы по пути ACB и AB считать тождественными.

Пусть разность температуръ на пути AC = dT_1, на пути CB = dT_2; тогда количество тепла, полученнаго на пути AB, представится черезъ $dQ = C_v \, dT_1 + C_p \, dT_2$ 48

Здѣсь C_p и C_v взяты въ терміяхъ. Законъ Шарля-Бойля далѣе

для $AC \ldots v\,dp = R\,dT_1$ $\quad dT_1 = \frac{v\,dp}{R} \ldots\ldots$ a

для $CB \ldots p\,dv = R\,dT_2$ $\quad dT_2 = \frac{p\,dv}{R} \ldots\ldots$ в

слѣд. $dQ = \frac{C_v v}{R}\cdot dp + \frac{C_p p}{R}\,dv \ldots\ldots\ldots 48$

Такъ выразится первый законъ термодинамики для какого-нибудь процесса.

p. и v можно считать за независимыя перемѣнныя. Изъ уравненія $pv = RT$ можно опредѣлить или p, или v и внести въ формулу 48. 1) $dQ = \frac{C_v v\,dp}{R} + \frac{C_p p\,dv}{R}$

$pv = RT$ $\quad \frac{1}{R} = \frac{T}{pv}$

$$dQ = C_p\, T\frac{dv}{v} + C_v\, T\frac{dp}{p} = C_v v\frac{dP}{R} + C_p\left(dT - \frac{v}{R}dp\right) =$$

$$C_p\,dT - \frac{C_p - C_v}{R}\,v\,dp$$

$$2)\ \frac{dQ}{T} = C_p\frac{dv}{v} + C_v\frac{dp}{p} \ldots\ldots\ldots 48(a$$

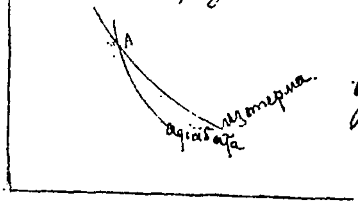
но $\frac{C_p - C_v}{R} = 1$. 3) $dQ = C_p\,dT - v\,dp$

Такъ какъ $C_p = const$, $C_v = const$, то вторая часть есть полный дифференціалъ. 4) $dQ = C_v\,dT + p\,dv$

$$\frac{dQ}{T} = C_p\,d(\log v) + C_v\,d(\log p)$$

$$\frac{dQ}{T} = d\log\left(v^{C_p}p^{C_v}\right) \ldots\ldots\ldots 48в$$

Если $dQ = 0$ то $\frac{dQ}{T} = 0$ и $v^{C_p}p^{C_v} = const$. $dQ = 0$ характеризуетъ адіабатный процессъ, слѣдов. $v^{C_p}p^{C_v} = const$ есть уравненіе адіабаты. Если черезъ точку A начертить изотерму $vp = Const$ и адіабату $v^{C_p}p^{C_v} = Const$, то послѣдняя спускается круче къ оси абсциссъ чѣмъ изотерма.



Обозначимъ буквой S выраженіе $\log(v^{C_p}p^{C_v}) + Const$ тогда

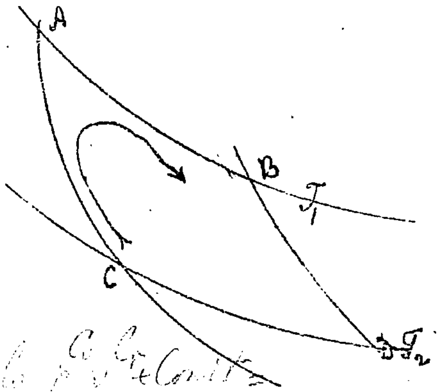
$$\frac{dQ}{T} = dS \ldots\ldots\ldots 49$$

$\frac{dQ}{T} = dS$

[illegible]

Представимъ себѣ на діаграммѣ какую либо изотерму и пусть газъ находится въ состояніи A. Проведемъ изъ этой точки адіабату. Для A будемъ имѣть $S_0 = \log(p_0^{C_v} v_0^{C_p})$. Пусть газъ перешелъ по изотермѣ въ состояніе B $(p_1 v_1)$ Проводимъ новую адіабату и пишемъ

$$S_1 = \log(p_1^{C_v} v_1^{C_p})$$



Количество тепла взятаго тѣломъ на пути AB есть $dQ = T dS$, а такъ какъ $T = const$ то

$$Q_A^B = T_1(S_1 - S_0) = Q_1$$

Столько тепла газъ приметъ на изотермѣ AB. Проведемъ новую изотерму T_2 по ней газъ приметъ количество тепла

$S = \log p^{C_v} v^{C_p} + Const =$

$C_v \log p + C_p \log v + Const$

$C_v + R = C_p$ $S = C_v \log p + C_v \log v + R \log v + \ldots$ $= C_v \log T + R \log v + \ldots = C_v \log R + C_v \log T + R \log v + \ldots$

$S = C_v \log T + R \log v + D$

$$Q_2 = T_2(S_1 - S_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 50a$$

Вообще для n-изотермы имѣемъ

$$Q_n = T_n(S_1 - S_0) \quad \ldots\ldots \quad 50$$

Количества $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ могутъ быть приняты за мѣры абсолютной температуры тѣла, находящагося въ соприкосновеніи съ источниками тепла температуръ $T_1 \ldots T_2 \ldots T_n$, измѣренныхъ газовымъ термометромъ. Понятно, что $Q_1 : Q_2 : \ldots : Q_n = T_1 : T_2 \ldots : T_n$ 51

Абсолютныя температуры тѣлъ можно измѣрять температурами изотермъ — показаніями газоваго идеальнаго термометра. Мы обозначимъ $T = 273 + t$, гдѣ t темп. считаемая отъ обыкновеннаго нуля. Отсюда видимъ, что $T = 0$ соотвѣтствуетъ $t = -273°$. $T = 0$ наз. абсолютнымъ —

Умовъ. Механ. Теор. Тепл.

нулемъ.
Но это понятіе есть чисто условное, ибо пропорціональность Q и T, измѣряемаго по газовому термометру (см. 50а), справедлива только въ тѣхъ предѣлахъ, для которыхъ газы слѣдуютъ закону Маріотта и Ге-Люссака.
Отношеніе 51 даетъ возможность установить какую угодно шкалу температуръ по какимъ угодно начальнымъ точкамъ.
Положимъ, что хотимъ установить такую шкалу, начальныя точки которой суть (подъ давленіемъ атмосферы): таяніе льда, кипѣніе воды, сѣры и т. д.
Мы знаемъ, что по обыкновенному термометру первое имѣетъ мѣсто при 273°, второе при 373° и т. д. Поэтому для перваго взявъ 1000° для второго возьмемъ $\frac{373}{273}\cdot 1000°$ и т. д.
Отношенія абсолютныхъ температуръ кипѣнія воды и таянія льда должно равняться всегда $\frac{373}{273}$, числовыя значенія ихъ могутъ быть какія угодно.
Въ силу отношенія 51 можно экономическій коэффиц. машины выразить черезъ показанія газоваго термометра.

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

§ 25. Выше было найдено

$$\underline{S = \log(p^{c_v} v^{c_p})}$$

Легко видѣть, что S есть то, что мы называли энтропіей. Итакъ, слѣд., найдена энтропія газа. Для общности выраженія S должно содержать постоянную интеграціи, поэтому

$$S - S_0 = \int \frac{dQ}{T} = \int d\log(p^{c_v} v^{c_p}) =$$

$$= \log(p_1^{c_v} v_1^{c_p}) - \log(p_0^{c_v} v_0^{c_p})$$

или $S = S_0 + \log(p^{c_v} v^{c_p}) - \log(p_0^{c_v} v_0^{c_p})$ . . . . 62.

Опредѣлимъ теперь энергію газа.

$$pv = RT$$
$$pdv + vdp = RdT$$
$$vdp = RdT - pdv$$

Вставимъ это въ формулу 48

$$dQ = C_v\, dT - \frac{C_v}{R} p\, dv + \frac{C_p}{R} p\, dv \;\ldots\ldots\; 53$$

$$dQ = C_v\, dT + \frac{C_p - C_v}{R} p\, dv$$

Но $C_p - C_v = R$ и мы пишемъ

$$dQ = C_v\, dT + p\, dv \;\ldots\ldots\ldots\; 54$$

Сравненіе полученнаго выраженія dQ съ его общимъ видомъ показываетъ, что

$$dU = C_v\, dT$$
$$U = C_v T + Const;$$
55 $$U = K + C_v T$$

Мы имеемъ [illegible]
p, v, T, U, S
[illegible]
$S = D + C_v l$[illegible]$+ R l$[illegible]
$U = K + C_v T$
$pv = RT$
[illegible]

Для нѣкотораго T_0 будетъ $U = U_0$. Слѣдовательно:

$$U = U_0 + C_v(T - T_0) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 55$$

Допустимъ, что для $T = 0$, $U = 0$, тогда $Const = 0$

$$U = C_v T \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 56$$

Это выраженіе представляетъ избытокъ энергіи $(U-U_0)$ надъ тою, которую газъ имѣлъ бы при $T=0$, если бы до этой температуры онъ сохранилъ бы свои свойства.

Для U можно дать другое выраженіе.

$$dQ = dU + p\,dv$$

$$dU = dQ - p\,dv$$

Замѣняя dQ черезъ 49

$$dU = T\,dS - p\,dv \quad \ldots\ldots\ldots 57$$

Дѣлимъ все на $U = C_v T$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dS}{C_v} - \frac{p}{C_v}\cdot\frac{dv}{T}$$

Вмѣсто $\frac{p}{T}$ вставляемъ $\frac{R}{v}$ изъ ур. Бойля

$$\frac{dU}{U} = \frac{dS}{C_v} - \frac{R}{C_v}\cdot\frac{dv}{v} \quad \ldots\ldots\ldots 58$$

интегрируемъ:

$$\log U = \frac{S}{C_v} - \frac{R}{C_v}\log v + const$$

Пусть при $U=1$ будетъ $v=1$, и $S=0$; тогда $Const=0$ и мы имѣемъ выраженіе энергіи черезъ энтропію.

$$\log U = \frac{S}{C_v} - \frac{R}{C_v}\log v \quad \ldots\ldots\ldots 59$$

Уравненіе 59 можно представить еще такъ:

$$\log\left(Uv^{\frac{R}{C_v}}\right) = \frac{S}{C_v} \quad \ldots\ldots\ldots 60$$

или

$$Uv^{\frac{R}{C_v}} = e^{\frac{S}{C_v}} \quad \ldots\ldots\ldots 61.$$

$$U = e^{\frac{S}{c_v}} v_1^{-\frac{R}{c_v}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62.$$

Итакъ для газа найдены выраженія пяти элементовъ S, U p, v и T, характериз. его состояніе.

Изъ этихъ пяти величинъ за независимыя можно взять только какія-нибудь двѣ.

§ 24. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя термодинамическія явленія въ газахъ; начнемъ съ процесса изотермическаго. Припомнимъ, что уравненіе Шарля-Бойля $pv=R.T$ представитъ для $T=const.$ равностороннюю гиперболу, а выраженіе $dQ=C_v\,dT+pdv$ обратится въ

$$dQ = pdv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63.$$

Изъ этого выраженія можно найдти то количество тепла, которое нужно сообщить газу, чтобы онъ, расширяясь, не мѣнялъ своей температуры. Интегрируемъ выр. 63

$$Q = \int p\,dv$$

но $p = RT.\frac{1}{v}$ и $Q = \int_{v_0}^{v_1} RT.\frac{dv}{v} = R.T\{\log\frac{v_1}{v_0}\} = F \quad \ldots \quad 64$

гдѣ F есть площадь, ограниченная изотермой, крайними ординатами и Ov.

Процессъ въ одно и тоже время изотермическій и изодинамическій. Такъ какъ въ разбираемомъ случаѣ $T=const$, то выраженіе

$$dQ = TdS$$

интегрируется прямо и даетъ

$$Q = T(S_1 - S_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 65.$$

Поставимъ себѣ вопросъ, въ какой мѣрѣ должно измѣнится состояніе газа въ изотермическомъ процессѣ, чтобы онъ поглотилъ Г терміей. По условію у насъ $Q = Г$; слѣдоват. (64):

$$R \log \frac{v_1}{v_0} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 66а$$

Изъ соотношенія (65), кромѣ того,

$$1 = S_1 - S_0 \qquad S_1 = S_0 + 1$$

Разсматриваемая перемѣна соотвѣтствуетъ измѣненію энтропіи на единицу.

При этомъ должно удовлетворяться условіе 66а. Его можно переписать такъ

$$\frac{v_1}{v_0} = e^{\frac{1}{R}}$$

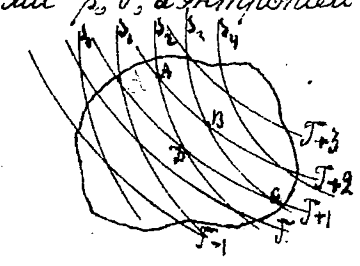
$$\mathcal{L}g \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{R} \cdot \mathcal{L}g\, e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 66б$$

66в. даетъ соотношеніе между начальнымъ и конечнымъ объемами. Зная R, легко найти это соотношеніе. Для воздуха, напримѣръ, $R = 29,272$ и $\frac{v_1}{v_0} = 1.0351$. Слѣдовательно, всякій разъ, когда отношеніе конечнаго объема газа къ начальному въ процессѣ изотермическомъ представляется предыдущей цифрой, газъ поглотилъ Г терміей и его энтропія повышалась на единицу.

Вообразимъ себѣ нашу діаграмму p, v

Газъ въ начальномъ состояніи A характеризуется координатами $p_0\, v_0$ и энтропіей S_0, а въ конечномъ B черезъ $p_1\, v_1$ и $S_1 = S_0 + 1$. Тепло, поглощаемое при этомъ, равно Г терміи. Проведемъ адіабату S_0 чрезъ A. Ея уравненіе

$$p^{c_v} v^{c_p} = p_0^{c_v} v_0^{c_p} = Const. \quad .. \quad 67$$



Строимъ точно также вторую адiабату $S_1 = S_0 + 1$. Она проходитъ черезъ В и ея ур-iе будетъ $p^{c_v} v^{c_p} = p_1^{c_v} v_1^{c_p}$. Проведемъ изотерму, которой температура разнилась бы на 1° отъ T. Для этого пишемъ уравненiе газа для T и T+1° въ точкахъ A и A' (p', v'), $p_0 v_0 = RT$ $p'v' = R(T+1)$ или, перемѣнная ихъ:

$$p_0 v_0 (T+1) = p'v' T \quad \ldots\ldots 68$$

Точки A и A' лежатъ на адiабатѣ S_0; ея ур-iе даетъ намъ второе соотношенiе между p', v' опредѣляющими положенiе точки A'. Извлекая корень степени c_v, ур. адiабаты S_0 получаетъ видъ:

$$p v^{\frac{c_p}{c_v}} = p_0 v_0^{\frac{c_p}{c_v}}$$

или

$$p v^{k} = p_0 v_0^{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 69$$

Для точки A' будетъ $p' v'^{k} = p_0 v_0^{k}$.

Раздѣляя это выраженiе на (68) (правую часть на лѣвую):

$$\frac{v'^{k-1}}{v_0^{k-1}} = \frac{T}{T+1}$$

отсюда находимъ

$$v' = v_0 \left(\frac{T}{T+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \ldots\ldots 70а$$

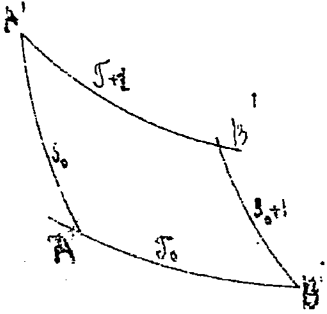
и возвышая (68) въ степень k и дѣля на (69), найдемъ:

$$p' = p_0 \left(\frac{T+1}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \ldots\ldots 70б$$

Такимъ образомъ получаемъ p', v', опредѣляющiя положенiе точки A' съ температурой T+1 на адiабатѣ S_0. Построивъ черезъ нее изотерму T+1, найдемъ точку

B' пересѣченія съ адіабатой S_0+1. На пути $A'B'$ газъ поглотитъ $T+1$ термій. Разсуждая точно также, мы построимъ изотермы $T+2$, $T+3$, $T+n$ и $T-1$, $T-2$ ... $T-n$. Эти числа представляютъ въ тоже время число термій, поглощаемыхъ газомъ на пути отъ адіабаты S_0 къ S_0+1. Каждый четыреугольникъ, у котораго двѣ стороны суть адіабаты, коихъ параметры разнятся на единицу, а другія двѣ стороны суть изотермы, коихъ параметры тоже отличаются на единицу, представляетъ циклъ Карно.

Увеличивая по указанному выше правилу (69) объемы v, построимъ новыя адіабаты S_0+2, S_0+3 и т. д. Вся площадь діаграммы покроется такимъ образомъ сѣтью четыреугольник. въ родѣ $A'B'BA$. Разберемъ подробнѣе этотъ циклъ. На пути $A'B'$ газъ расширяясь поглощаетъ тепло: $Q_1 = (T+1)(S_1-S_0)$; на пути AB газъ сжимаясь отдаетъ



$$Q_2 = T(S_1-S_0)$$

слѣд. $Q_1 - Q_2 = S_1 - S_0 = 1$ . . . 71

Работа въ нашемъ процессѣ соотвѣтствуетъ затратѣ въ одну термію и равна 1^{kgmtr}. Слѣд. всѣ четыреугольники сѣти равновелики другъ другу.

Подобную схему мы могли бы построить и для иныхъ тѣлъ, если бы знали для нихъ ур-іе состоянія.

§ 75. Перейдемъ теперь къ изученію адіабатн. процесса. Онъ выражается уравненіемъ

$$p v^k = p_0 v_0^k$$

Это уравненіе можно представить въ нѣсколько иной формѣ. Мы знаемъ, что

$$pv = RT;\ p_0v_0 = RT_0$$ откуда

$$pv\,T_0 = p_0v_0\,T$$

Дѣля на это уравненiе ур. (~~71~~ 69):

$$\frac{v^{k-1}}{T_0} = \frac{v_0^{k-1}}{T}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1} \ldots\ldots\ldots 72$$

Исключивъ изъ (69) v какъ это дѣлали выше найдемъ другое выраженiе

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \ldots\ldots\ldots 72\ a$$

72 и 72 а даютъ измѣнiе температуры въ адiабатномъ процессѣ, который можетъ осуществиться быстрымъ сжатiемъ или расширенiемъ тѣла (съ тѣмъ различiемъ, что въ этомъ послѣднемъ случаѣ процессъ будетъ необращаем) Будемъ сжимать воздухъ до ½, ¼ 1/10 объема и вычислимъ, насколько повысится его температура, принимая, что начальная равна $T_0 = 273°$ т. е. $t = 0°C$. Такъ какъ $k = 1{,}41$, то оказывается, что $T - T_0$ соотвѣтственно равно

90°C 209° и 429°. (изъ форм. 72)

(Воздушное огниво).

Если въ формулѣ 72 а положимъ $p_0 = 10^{atm}$ $p = 1^{atm}$, $T_0 = 273° + 20°C$ то $T = -121°{,}23$ т. е. при быстромъ расширенiи (при истеченiи въ атмосферу) сильно сжатаго газа его температура сильно понижается.

Это обстоятельство вполнѣ объясняетъ опыты Кальете надъ сжиженiемъ газовъ.

§ 26. Заключимъ этотъ отдѣлъ термодинамики изложенiемъ способовъ опредѣленiя k.

Умовъ. Механ. Теор. Тепл.

Въ гидродинамикѣ дается формула для опредѣленія скорости распространенія продольныхъ колебаній (звука) въ газѣ:

$$\omega = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \ldots\ldots \quad 73$$

гдѣ ρ плотность, т. е. масса единицы объема, въ нашемъ случаѣ 1 кубич. метра. Означая черезъ g ускореніе тяжести въ метрахъ, черезъ γ вѣсъ кубич. метра газа въ килограммахъ имѣемъ $\gamma = \rho g$. Но $\gamma = \frac{1}{v}$ слѣд.

$$\frac{1}{v} = \rho \cdot g \qquad \text{и}$$
$$-\frac{1}{v^2}\, dv = d\rho \cdot g$$

$v = \frac{1}{\rho}$

И наша формула приметъ видъ

$$\omega = \sqrt{-g v^2 \frac{dp}{dv}}$$

Такъ какъ сжатія и расширенія газа въ звучныхъ волнахъ совершаются настолько быстро, что происходящія при этомъ повышеніе и пониженіе температуры не успѣваютъ выравниваться съ окружающими частицами, то мы имѣемъ дѣло съ процессомъ адиабатнымъ, слѣд. $dQ = 0$ и формула

$$dQ = C_v .\, T .\, \frac{dp}{p} + C_p\, T \frac{dv}{v}$$

даетъ $C_v \frac{dp}{p} + C_p \frac{dv}{v} = 0$ или $kp = -\frac{v\,dp}{dv}$

$pv^k = C$

$p = a\rho^k$

Отсюда $\omega = \sqrt{g v p k}$,

а такъ какъ $vp = RT$ то

$$\omega = \sqrt{g . \kappa . R . T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74$$

Называя значеніе коэф. R для воздуха черезъ R_1, находимъ для другого газа $R = \frac{R_1}{\varepsilon}$, гдѣ ε плотность газа относит. воздуха.

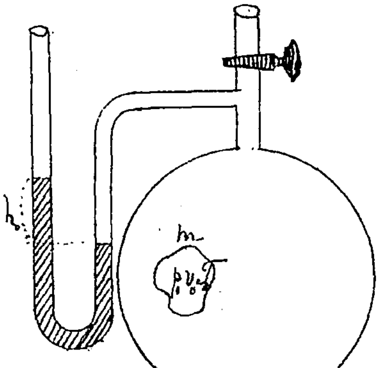
$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{g R_1 \kappa}$$

Мы видимъ, что второй членъ постоянный а первый показываетъ, что ω обратно пропорціонально $\sqrt{\varepsilon}$

При $\varepsilon = 1$ имѣемъ ω для воздуха.

Опытъ показалъ, что ω для воздуха при 0°C есть 332.4 $^{mt/sec.}$ (Bravais въ 1844 году). слѣд. $\kappa = 1,41$.

Есть еще способъ опредѣленія κ, данный Клеманомъ и Дезормомъ. Берутъ шаръ большихъ размѣровъ, съ краномъ и манометромъ. Производимъ слѣдующія манипуляціи. 1) Вгоняемъ въ баллонъ (или выкачиваемъ) нѣкоторое количество воздуха. Благодаря сжатію газъ нагрѣется, затѣмъ онъ, постепенно охлаждаясь, приметъ температуру T_0 окружающей среды. Понятно, что



жидкость манометра подымется на нѣкоторую высоту и давленіе будетъ равно атмосферѣ $P + h$. Вообразимъ себѣ въ баллонѣ нѣкоторую массу m и будемъ слѣдить за ея состояніями. Объемъ ея пусть V_0.

2) Открываемъ кранъ и ждемъ, пока высоты жидкости въ обѣихъ колѣнахъ не будутъ равны. Тогда кранъ запираемъ. Объемъ массы m въ моментъ закрытія крана есть нѣкоторое v, давленіе $= P$, а температура неизвѣстная есть T. 3) По

истеченіи нѣкотораго времени температура баллона сравняется съ окружающей, что обнаружится прекращеніемъ движенія жидкости въ манометрѣ. Состояніе массы m опредѣлится величинами $p_1 = \mathcal{P} + h_1$, v и T_0. Объемъ v будетъ тотъ же, что въ предшествовавшей манипуляціи, такъ какъ съ момента закрытія крана - измѣненіе объема баллона происходило только отъ перемѣщенія жидкости въ манометрѣ; этимъ измѣненіемъ можно пренебречь, такъ какъ оно очень мало сравнительно со всѣмъ объемомъ, занятымъ баллономъ. Но и этого малаго измѣненія можно избѣгнуть, выбирая изъ манометра жидкость. Итакъ, въ нашихъ трехъ манипуляціяхъ состояніе воображаемой массы m характеризовалось слѣдующими величинами:

$p_0 \ (= \mathcal{P} + h_0)$	v_0	T_0	I
$\mathcal{P}$	v	T	II
$p_1 \ (\mathcal{P} + h_1)$	v	T_0	III

Между I и II процессъ адіабатный:

$$\mathcal{P} v^k = p_0 v_0^k \quad . \ . \ . \ . \quad а$$

Въ I и III температура одинаковая; примѣняя законъ Бойля, имѣемъ

$$p_1 v = p_0 v_0 \qquad \text{или возвышая въ степень } k:$$

$$p_1^k v^k = p_0^k v_0^k \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad в$$

Дѣля (в) на (а), выводимъ:

$$\frac{p_1^k}{\mathcal{P}} = \frac{p_0^k}{p_0}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^k = \frac{\mathcal{P}}{p_0}$$

откуда $$k = \frac{\log \mathcal{P} - \log p_0}{\log p_1 - \log p_0} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 75.$$

Этой формулѣ можно дать простой видъ, разложивъ $\log p_0$ и $\log p_1$ по степенямъ малыхъ величинъ $\frac{h_0}{\mathcal{P}}$ и $\frac{h_1}{\mathcal{P}}$ и пренебрегая степенями выше первой.

$$p_0 = \mathcal{P} + h_0 = \mathcal{P}\left(1 + \frac{h_0}{\mathcal{P}}\right)$$

$$p_1 = \mathcal{P} + h_1 = \mathcal{P}\left(1 + \frac{h_1}{\mathcal{P}}\right)$$

$$k = \left\{\log \mathcal{P} - \log \mathcal{P} - \log\left(1+\frac{h_0}{\mathcal{P}}\right)\right\} \Big/ \left\{\log \mathcal{P} + \log\left(1+\frac{h_1}{\mathcal{P}}\right) - \log \mathcal{P} - \log\left(1+\frac{h_0}{\mathcal{P}}\right)\right\}$$

$$k = \frac{\log\left(1+\frac{h_0}{\mathcal{P}}\right)}{\log\left(1+\frac{h_0}{\mathcal{P}}\right) - \log\left(1+\frac{h_1}{\mathcal{P}}\right)} = \frac{h_0}{h_0 - h_1} \quad \ldots\ldots 75\ а$$

(Пользуясь формулой $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$)

§ 27. При выводѣ выраженіе виріала для газа, мы дали формулу, опредѣл. живую силу поступательнаго движенія его частицъ:

$$\sum \frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2}\, pv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 76.$$

Если газъ одно-атомный, то первая часть есть сумма живыхъ силъ всѣхъ его атомовъ; пренебрегая молекулярными силами, эта живая сила обнимаетъ всю энергію газа, т. е.

$$\sum \frac{mu^2}{2} = U.$$

Такъ какъ $pv = RT$, то $\sum \frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2} RT$ или

$$d\sum \frac{mu^2}{2} = 3/2\; R\, dT$$

Было указано, что $dU = C_v\, dT$, отсюда

$$\frac{d\sum \frac{mu^2}{2}}{dU} = 3/2 \cdot \frac{R}{C_v}$$

Но по нашему условію первая часть этого равенства есть единица, слѣд..

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{R}{C_v} = 1.$$

Зная, что $R = C_p - C_v$, пишемъ

$$\frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{2}{3} \qquad \text{или}$$

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + 2/3 = 1,6 \ldots\ldots$$

Кундтъ и Варбургъ нашли для ртути $k = 1,67$, слѣд. Hg — одно-атомна.

V. Термодинамика тѣлъ произвольнаго строенія

§ 28. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію этого отдѣла термодинамики, выведемъ нѣкоторыя дифференціальныя соотношенія.

Пусть $\zeta = f(\xi, \eta)$. Полный дифференціалъ напишется такъ

$$d\zeta = \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta d\xi + \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_\xi d\eta \quad \ldots\ldots\ldots 77.$$

Индексы η и ξ показываютъ, что при диффер. то или другое перемѣнное считалось постояннымъ.

Пусть $d\eta = 0$. Тогда

$$(d\zeta)_\eta = \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta d\xi$$

$$1 = \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta \left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)_\eta$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta = \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)_\eta}$$

Считая $\xi = Const.$ и $d\xi = 0$, найдемъ

$$\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_\xi = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_\xi}$$

Полагая $d\zeta = 0$ изъ соотношенія 77 находимъ

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta \left(d\xi\right)_\zeta + \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_\xi \cdot \left(d\eta\right)_\zeta = 0, \; \dots\dots \; 77a$$

но мы знаемъ, что

$$\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_\xi = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_\xi}$$

слѣд. 77a дастъ:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta \cdot \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_\zeta \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_\xi = -1 \; \dots\dots\dots \; 78$$

§ 29. Теперь разберемъ, какой смыслъ имѣютъ производныя

$$\frac{dQ}{dT}, \quad \frac{dQ}{dv} \quad и \quad \frac{dQ}{dp}$$

Первое выраженіе есть теплоемкость, $\frac{dQ}{dv}$ скрытая теплота расширенія и $\frac{dQ}{dp}$ скрытая теплота сжатія.
Считая v или p постоянными, находимъ

$$\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = c_v \quad \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = c_p \; \dots\dots \; 79a$$

Если $dQ = 0$, то процессъ адіабатный и $c = 0$
При $dT = 0$, $\frac{dQ}{dT} = c = \pm\infty$, т. е. въ изотермическомъ процессѣ теплоемкость мѣняется отъ $-$ до $+\infty$. Слѣдовательно величина или знак законъ теплоемкости опредѣляется процессомъ,

въ которомъ участвуетъ тѣло. Говоря о теплоемкости, долженъ быть указываемъ и процессъ.

Мы назовемъ скрытую теплоту расширенія черезъ $\mathcal{L}$, а сжатія черезъ $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{dQ}{dv}\right)_T \qquad \mathcal{G} = \left(\frac{dQ}{dp}\right)_T = \ldots\ldots\ldots 79\text{ б}$$

Кромѣ того мы можемъ разсматривать въ процессахъ измѣненіе единицы объема тѣлъ и притомъ съ двухъ точекъ зрѣнія, какъ обусловливаемое или 1) измѣненіемъ T, или 2) измѣненіемъ давленія:

$$\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \alpha \text{ (коэффиціентъ термическаго расширенія подъ постояннымъ давленіемъ)}$$

79 с.

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T = \Delta \text{ (коэффиціентъ сжатія при постоянной температурѣ)}$$

Знакъ — явился оттого, что $\frac{dv}{dp}$ отрицательно.

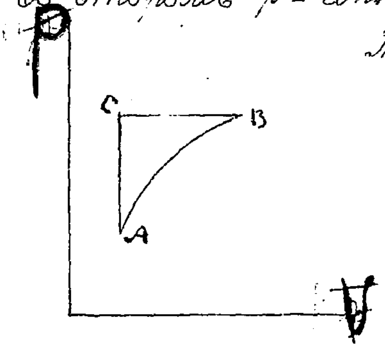
Мѣрой упругости тѣла служитъ отношен. давленія къ произведенному сжатію

$$\varepsilon = \frac{dp}{-\frac{dv}{v}} = -v\,\frac{dp}{dv} \qquad 79\text{ д}$$

Мы разсмотримъ упругость тѣла въ изотермическомъ процессѣ, т. е. ε_T и въ адіабатномъ, т. е. ε_S.

§ 30. Укажемъ формы въ которыхъ могутъ быть выражены основные законы термодинамики въ общемъ случаѣ. Мы увидимъ, что такихъ формъ имѣется три, какъ и въ газахъ, сообразно тремъ парамъ независимыхъ перемѣнныхъ, которыя могутъ быть составлены изъ p, v, T.

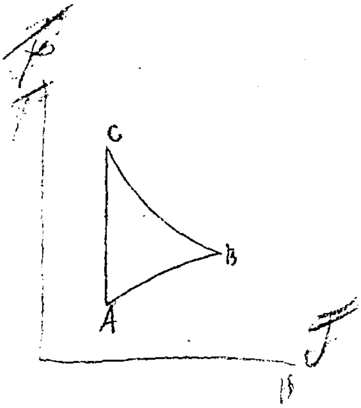
1) Для нахожденія выраженія въ независимыхъ перемѣнныхъ p и v положимъ, что нѣкоторый процессъ AB замѣненъ двумя безконечно малыми AC и CB: первый изъ нихъ при $v = const$, во второмъ $p = const$.



Понятно, что

$$dQ = C_p\left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv + C_v\left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp \ldots\ldots 80$$

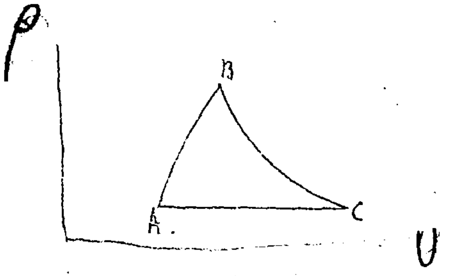
2) Чтобы получить выраженіе въ независимыхъ перемѣнныхъ T и v, замѣна безконечно малаго процесса AB должна быть произведена инымъ способомъ. Заставимъ тѣло изъ начальнаго состоянія A ~~измѣниться по изометрѣ~~ [illegible] до C а отъ C до B по изотермѣ. Въ первомъ процессѣ тѣло получаетъ тепло $C_v . dT$. Если теплота расширенія въ изотермическомъ процессѣ $l = \left(\frac{dQ}{dv}\right)_T$ то dQ напишется такъ



$$dQ = C_v\, dT + l\, dv \ldots\ldots\ldots 81$$

$$\cancel{C_p dT + g\,dp}.$$

3) Независимыя перемѣнныя T и p. Отъ A до C мы измѣняемъ тѣло при постоянномъ давленіи, а отъ C къ B возвращаемся по изотермѣ. Если g есть скрытая теплота сжатія, то



$$dQ = C_p\, dT + g\, dp \ldots\ldots\ldots 82$$

$$\cancel{C_v dT + l\, dv}$$

§. 31. Выведенные нами основные законы термодинамики

Услов. Механ. Теор. Теплоты.

Литогр. Выс. рисовр. пол. книг.

выражались такъ:

$$dU = dQ - p\,dv$$

$$dQ = T\,dS$$

Внесемъ сюда выраженіе dQ (80)

$$dU = C_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp + \left\{ C_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p - p \right\} dv \;.\;.\;.\;.\;.\; 83$$

$$dS = \frac{C_v}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp + \frac{C_p}{T}\left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 84$$

dU и dS суть полные дифференціалы; слѣд., члены вторыхъ частей дадутъ такія соотношенія:

$$\frac{d}{dv}\left\{ C_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v \right\} = \frac{d}{dp}\left\{ C_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p - p \right\}$$

$$\frac{d}{dv}\left\{ \frac{C_v}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)_v \right\} = \frac{d}{dp}\left\{ \frac{C_p}{T}\left(\frac{dT}{dv}\right)_p \right\}$$

Считая p и v независимыми перемѣнными, выполняемъ дифференцированіе:

$$\frac{dT}{dp}\,\frac{dC_v}{dv} + \frac{d^2T}{dv\,dp}\,C_v = \frac{dC_p}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} + C_p\,\frac{d^2T}{dv\,dp} - 1$$

$$-\frac{C_v}{T^2}\cdot\frac{dT}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} + \frac{1}{T}\cdot\frac{dC_v}{dv}\cdot\frac{dT}{dp} + \frac{C_v}{T}\cdot\frac{d^2T}{dp\,dv} =$$

$$-\frac{C_p}{T^2}\cdot\frac{dT}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} + \frac{1}{T}\cdot\frac{dC_p}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} + \frac{C_p}{T}\cdot\frac{d^2T}{dp\,dv}$$

Умноживъ нижнее ур-іе на T, вычтемъ его изъ верхняго; по сокращеніи получимъ:

$$\frac{C_v}{T}\cdot\frac{dT}{dv}\cdot\frac{dT}{dp} = \frac{C_p}{T}\cdot\frac{dT}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} - 1.$$

или, возстановляя значки,

$$\left(C_p - C_v\right) \cdot \left(\frac{dT}{dp}\right)_v \cdot \left(\frac{dT}{dv}\right)_p = T \quad \ldots\ldots\ldots \quad 85$$

Это общее соотношеніе теплоемкостей C_p и C_v. Соотнош. этихъ величинъ для газовъ получается изъ него какъ частный случай. Именно $pv = R.T$, и $\left(\frac{dT}{dp}\right)_v = \frac{v}{R}$, и $\left(\frac{dT}{dv}\right)_p = \frac{p}{R}$; слѣд., $(C_p - C_v) \cdot \frac{pv}{R^2} = T$ или

$$\frac{C_p - C_v}{R} = 1.$$

Выше было найдено $\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta = \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{d\zeta}\right)_\eta}$

слѣд. $\left(\frac{dT}{dv}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dT}\right)}$ и формула 85 принимаетъ видъ:

$$\left(C_p - C_v\right) \left(\frac{dT}{dp}\right)_v = T \cdot \left(\frac{dv}{dT}\right)_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad 85a$$

Затѣмъ пользуемся формулой

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_\eta \cdot \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_\zeta \cdot \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_\xi = -1$$

для преобразованія $\left(\frac{dT}{dp}\right)_v$, именно

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_v \left(\frac{dp}{dv}\right)_T \left(\frac{dv}{dT}\right)_p = -1.$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_v = -\frac{1}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_T \left(\frac{dv}{dT}\right)_p}$$

$$C_p - C_v = -T \left(\frac{dv}{dT}\right)_p^2 \cdot \left(\frac{dp}{dv}\right)_T \quad \ldots\ldots\ldots \quad 85б$$

Наконецъ $\left(\frac{dp}{dv}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_T}$ и.

$\left(\frac{dv}{dp}\right)_T \left(\frac{dp}{dT}\right)_v \left(\frac{dT}{dv}\right)_p = -1$, $-\frac{\Delta\beta}{\alpha\beta}$ [illegible] $= -1$

$\Delta\beta . p = 1.$

$$C_p - C_v = -\frac{T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p^2}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_T} \quad \ldots\ldots\ldots\ 86.$$

Послѣднему выраженію можно дать простое физическое толкованіе.

$$C_p - C_v = -\frac{T.\left(\frac{dv}{dT}\right)_p^2}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_T} = -\frac{T v^2\left(\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dT}\right)_p^2}{v\left(\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dp}\right)_T} \quad \text{или}$$

$$C_p - C_v = T.v.\frac{\alpha^2}{\Delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 87$$

[illegible] $C_p > C_v$

т. е. разность теплоемкостей при постоянномъ объемѣ и постоянномъ давленіи равна произведенію абсолютной температуры на объемъ и на отношеніе квадрата термическаго расширенія къ кубическому сжатію. Опытъ даетъ и α и Δ. Замѣтимъ что $\Delta > 0$ слѣд. для всѣхъ тѣлъ $C_p > C_v$

Для воды при 4° C v = minimum слѣд.

$$\frac{dv}{dT} = 0, \quad \alpha = 0 \quad \text{и} \quad C_p = C_v$$

§ 32. Обратимся теперь къ выводу иныхъ формъ уравненій термодинамики преобразованіемъ только что разсмотрѣнной формы.

На первыхъ же шагахъ мы встрѣчаемъ затрудненіе въ томъ, что не знаемъ ур-нія подобнаго ур-нію Шарля-Бойля, т. е. ур-ія состоянія тѣла; но мы можемъ обойти это затрудненіе, замѣнивъ дифф. коэффиціентами тѣ величины, которыя были извѣстными для газовъ. Именно пользуемся выраженіемъ

$$dT = \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv + \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp \quad \ldots\ldots\ 88.$$

Откуда $\left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp = dT - \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv$, а мы нашли выше, что

$$dQ = C_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp + C_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv \quad . . . . 80$$

слѣд. $$dQ = C_v \, dT + (C_p - C_v)\left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv$$

Сравненіе съ формулой 81 даетъ

$$(C_p - C_v)\left(\frac{dT}{dv}\right)_p = \mathfrak{L} \quad . . . 89$$

Исключивъ $C_p - C_v$ при помощи формулы 85, находимъ

$$\mathfrak{L} = T \left(\frac{dp}{dT}\right)_v \quad \text{(формула Томсона)} \quad . . . 90$$

Для газовъ $$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \frac{R}{v} \quad \text{и}$$

$$\mathfrak{L} = \frac{R.T}{v} = p.$$

Представимъ себѣ изотермическій процессъ и найдемъ для него выраженіе Q.

$$dQ = C_v \, dT + \mathfrak{L} \, dv$$

но $dT = 0$ и $dQ = \mathfrak{L} dv$ или $dQ = T \left(\frac{dp}{dT}\right)_v dv$

$$Q = T \int \left(\frac{dp}{dT}\right)_v dv =$$

$$= T . \frac{d}{dT} \int p \, dv$$

ибо T и v суть перемѣнныя независимыя; но $\int p dv$ знач. площадь, ограниченная изотермой, осью Ov и ординатами крайнихъ точекъ, назовемъ ее F.

$$Q = T . \frac{dF}{dT} \quad . . . . 91$$

Таково выраженіе, данное Ранкиномъ для тепла, поглащеннымъ при расширеніи въ изотермическомъ процессѣ. Формула 90 и 79 в даютъ

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)_T = T\cdot\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

но $dQ = T\,ds$, и если $T = const$, то $(dQ)_T = T(ds)_T$; внося въ предыдущее соотношеніе, находимъ:

$$T\cdot\left(\frac{ds}{dv}\right)_T = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

$$\boxed{\left(\frac{ds}{dv}\right)_T = \left(\frac{dp}{dT}\right)_v} \quad \ldots\ldots\ldots\ 92$$

т. е. измѣненіе энтропіи при расширеніи по изотермѣ равно измѣненію давленія съ температурой въ процессѣ изотермическомъ, т. е. если при нагрѣваніи тѣла для сохраненія его объема нужно увеличивать давленіе, то энтропія увеличивается, когда тѣло расширяется, не измѣняя своей температуры: при этомъ поглощается теплота.

§ 33. Исключивъ $\left(\frac{dT}{dv}\right)_p$ изъ уравненія 80 и (88) имѣемъ

$$dQ = C_p\,dT - (C_p - C_v)\left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp$$

или по сравненіи съ 82.

$$g = -(C_p - C_v)\left(\frac{dT}{dp}\right)_v$$

наконецъ, по формулѣ 85 получаемъ формулу Томсона:

$$g = -T\cdot\left(\frac{dv}{dT}\right)_p \quad \ldots\ldots\ldots\ 93$$

$$g = -\alpha v.\ T \quad \ldots\ldots\ldots\ 94$$

принимая во вниманіе первое изъ соотнош. (79с). Для большинства тѣлъ природы α положительно, т. е. съ повышеніемъ температуры тѣло расширяется; поэтому скрытая теплота сжатія по изотермѣ отрицательна, слѣд. для поддержанія начальной температуры тѣла необходимо отнимать у него тепло.

Для воды отъ 0° до 4°C α отрицательно; слѣд. къ ней нужно подводить тепло, чтобы сохранить неизмѣнную температуру при сжатіи, если эти температуры находятся между указанными предѣлами: слѣдовательно въ такихъ предѣлахъ вода при сжатіи охлаждается.

Мы опредѣлили g какъ $\left(\frac{dQ}{dp}\right)_T$; но мы знаемъ: $dQ = T dS$; если $T = const$:

$$g = \left(\frac{dS}{dp}\right)_T \cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94a$$

Изъ этой формулы въ связи съ (93) имѣемъ

$$III \quad \boxed{\left(\frac{dS}{dp}\right)_T = -\left(\frac{dv}{dT}\right)_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95$$

$-\alpha v$

т. е. измѣненіе энтропіи съ давленіемъ по изотермѣ равно отрицательному измѣненію объема съ температ. по изопіестѣ.

§ 34. Теперь мы положимъ, что нашъ процессъ адіабатный. Полагая въ формулѣ (31)

$$dQ = C_v dT + l dv$$

$dQ = 0$, находимъ, что

$$\left(\frac{dT}{dv}\right)_S = -\frac{l}{C_v}$$

§ 35. Возьмемъ наше выраженіе энергіи

$$II \left(\frac{dv}{dT}\right)_p = -\frac{dS}{dp} = x_p v$$

$$dU = dQ - p\,dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 96$$

и подставимъ въ него наше $dQ = C_v\,dT + L\,dv$ (форм. 81)

$$dU = C_v\,dT + (L - p)\,dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad 97$$

Совершенно также найдемъ

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_v}{T}\,dT + \frac{L}{T}\,dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad 98$$

Соотношенія 97 и 98 суть полные дифф., а потому имѣемъ

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T}, \quad L - p = \frac{\partial U}{\partial v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 99$$

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$ (формула Клаузіуса)... 140

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_v}{T} &= \left(\frac{dS}{dT}\right)_v \\ \frac{L}{T} &= \left(\frac{dS}{dv}\right)_T \end{aligned}\right\} \quad 101$$

Ур. (100) можно преобразовать, пользуясь соотношеніемъ (90)

$$L = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

$$\left(\frac{dL}{dT}\right)_v = \left(\frac{dp}{dT}\right)_v + T\cdot\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)_v$$

а слѣдовательно

$$\frac{dC_v}{dv} = T\left(\frac{d^2p}{dT^2}\right)_v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102$$

Полагая въ формулѣ (31' $dQ = 0$ найдемъ:

$$\left(\frac{dT}{dv}\right) = -\frac{L}{C_v}$$

Вставляя сюда $L = T\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ (90) и $C_v = T\left(\frac{ds}{dT}\right)_v$ (101), найдемъ по сокращеніи на $(dT)_v$:

$$\boxed{\left(\frac{dT}{dv}\right)_s = -\left(\frac{dp}{ds}\right)_v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 103$$

т.е. измѣненіе температуры при расширеніи по адіабатѣ равно отрицат. измѣненію давленія съ энтропіей по изометрѣ. Отсюда видимъ, что если температура возрастаетъ при расширеніи по адіабатѣ, то въ изометрѣ давленіе убываетъ съ возрастаніемъ энтропіи.

§. 36. Исключимъ теперь изъ $dU - dQ$ при помощи соотнош. (82) а не (81)

$$dU = c_p\,dT + g\,dp - p\,dv$$ откуда, прибавляя и вычитая по $v\,dp$, безъ труда находимъ

$$d(U + pv) = c_p\,dT + (g + v)\,dp$$

Это опять полный дифференціалъ, т.е.

$$c_p = \frac{\partial(U+pv)}{\partial T}$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 104$$

$$g + v = \frac{\partial(U+pv)}{\partial p}$$

и $$\left(\frac{dc_p}{dp}\right)_T = \left(\frac{dg}{dT}\right)_p + \left(\frac{dv}{dT}\right)_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 105$$

Эта формула опять дана Clausius'омъ

Такъ какъ $g = -T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p$ (93), то

$$\left(\frac{dC_p}{dp}\right)_T = -\left(\frac{dv}{dT}\right)_p - T\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p + \left(\frac{dv}{dT}\right)_p$$

а слѣдовательно

$$\left(\frac{dC_p}{dp}\right)_T = - T\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106.$$

Выраженіе dS преобразовываемъ также при помощи (82), какъ дѣлали это съ формулой (31)

$$dS = \frac{C_p}{T}\, dT + \frac{g}{T}\, dp$$

откуда извлекаемъ

$$\left(\frac{C_p}{T}\right) = \left(\frac{dS}{dT}\right)_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106_2$$

Наконецъ, примѣняя 82 къ адіабатному процессу, т. е. полагая въ немъ $dQ = 0$ имѣемъ

$$C_p\, dT + g\, dp = 0$$

или

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_S = -\frac{g}{C_p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 107$$

Вносля сюда g и C_p изъ (93) и (103)$_a$ и сокращая на $(dT)_p$, получаемъ:

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_S = \left(\frac{dv}{dS}\right)_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad 108.$$

измѣненіе температуры по изэнтропѣ равно измѣненію объема съ энтропіей по изобарѣ. Если въ выраженіи (107) вставимъ g (94), то получимъ $\left(\frac{dT}{dp}\right)_S = \frac{\alpha v T}{C_p}$. Мы видимъ отсюда что при $dp = +$ въ адіабатномъ процессѣ, dT имѣетъ одинаковый знакъ съ α.

Вообще $\alpha = +$ и при сжатіи по адіабатному процессу $dT = +$.

Но для воды ниже 4° C, $\alpha = -$ и след. $dT = -$. Итакъ въ первомъ случаѣ сжатіе производитъ нагрѣваніе, во второмъ охлажденіе, т. е. термическіе эффекты таковы, что они стремятся препятствовать тому механическому эффекту которому подвергается тѣло. Мы имѣемъ здѣсь общій законъ подобный закону Ленца для наведенныхъ токовъ; его можно формулировать такъ: при дѣйствіи на тѣло, заключенное въ адіабатную оболочку, происходящее отсюда термическое явленіе таково, что соотвѣтственное измѣненіе температуры противодѣйствуетъ продолженію механическаго дѣйствія.

§ 37. Мы принимали за мѣру упругости

$$\varepsilon = -\frac{dp}{\frac{dv}{v}} \quad \text{или} \quad \varepsilon = -v\frac{dp}{dv}$$

Во всѣхъ опытахъ съ упругими тѣлами принимаютъ, что температура ихъ неизмѣнна, т.е. подвергаютъ ихъ процессамъ изотермическимъ; но это есть только частный случай, и опытъ показываетъ, что упругія свойства тѣла при быстрыхъ деформаціяхъ иныя. Поэтому эти послѣднія должны быть тоже изучаемы. Поэтому мы сравнимъ упругость тѣла въ процессахъ изотермическомъ и адіабатномъ.

Такимъ образомъ мы получаемъ

$$\varepsilon_T = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_T$$

$$\varepsilon_S = -v\left(\frac{dp}{dv}\right)_S \qquad \ldots\ldots\ldots 109.$$

Опредѣлимъ отношеніе $\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S}$.

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} = \frac{-v\left(\frac{dp}{dv}\right)_T}{-v\left(\frac{dp}{dv}\right)_S} = \frac{\left(\frac{dp}{dv}\right)_T}{\left(\frac{dp}{dv}\right)_S}$$

Положивъ въ выраженіи

$$dQ = C_v \left(\frac{dT}{dp}\right)_v dp + C_p \left(\frac{dT}{dv}\right)_p dv$$

$dQ = 0$ находимъ: $\left(\frac{dp}{dv}\right)_S = -\frac{C_p}{C_v}\frac{\left(\frac{dT}{dv}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v}$

Затѣмъ, полагая $dT = 0$, изъ соотношенія (88) находимъ

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_T = -\frac{\left(\frac{dT}{dv}\right)_p}{\left(\frac{dT}{dp}\right)_v}$$

слѣдовательно

$$\frac{E_T}{E_S} = -\frac{C_p}{C_v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 110$$

§ 38 Теперь мы знаемъ связи между различными параметрами, характеризующими состояніе тѣла.

Четыре термодинамическихъ соотношенія (92), (95), (103) и (108) могутъ быть выведены однимъ общимъ пріемомъ.

Представимъ себѣ какой либо замкнутый циклъ. Не трудно видѣть, что площадь замкнутой фигуры въ діаграммѣ (p, v) выразится $\int dp\,dv$; слѣд. работа цикла

$$W = \int dp\,dv.$$

Ту же величину работы можно выразить иначе. Проведемъ рядъ весьма близкихъ изотермъ и адіабатъ: весь циклъ мы разобьемъ на рядъ безконечно малыхъ цикловъ Карно. Пусть ABCD одинъ изъ такихъ цикловъ. На пути AB тѣло получаетъ тепло

$$dq_1 = (T + dT)\,dS$$

на пути CD $\quad dq_2 = (T)\,dS$

Слѣдовательно работа такого цикла есть

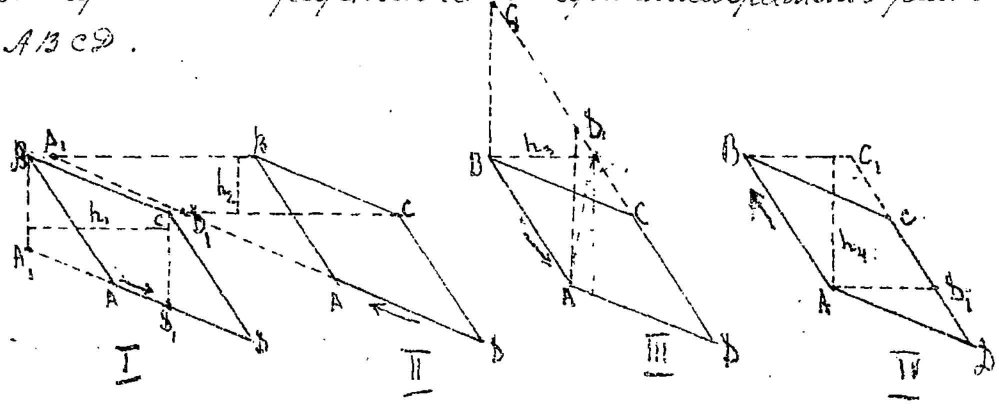
$dW = dq_1 - dq_2 = dT.dS..C.$ Работа же всего даннаго цикла есть $W = \int dT\,dS$

Итакъ $W = \iint dp\, dv = \iint dT\, dS$

Если циклы наши безконечно малы, то интегралы исчезаютъ, и мы имѣемъ право писать

$$dp . dv = dT . dS \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 111$$

Безконечно малому циклу ABCD площадь котораго есть dT. dS мы можемъ поставить четыре равновеликихъ цикла. Пусть AD и BC суть элементы изотермъ T и T+dT; AB и CD элементы адіабатъ S и S+dS. Линія AB соотвѣтствуетъ приросту температуры $dT = (dT)_S$, линія AD приросту энтропіи $dS = (dS)_T$. Первое выраженіе имѣетъ мѣсто, если T разсматривается какъ зависимое перемѣнное, второе если S есть зависимое. Замѣтимъ, что если x и y суть независимыя перемѣнныя то въ $(dF)_x$ знакъ d относится къ измѣненію y. На чертежѣ представлены параллелограммы равновеликіе ABCD.



I) T и v незав. пер.; $dp = A_1B = (dp)_v$, $h_1 = dv$, $dS = (dS)_T$

$(dp)_v . dv = dT . (dS)_T$;

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \left(\frac{dS}{dv}\right)_T$$

II) T и p незав. пер.: $dv = AB = (dv)_p$, $h_2 = dp$, $dS = -(dS)_T$
Здѣсь поставленъ знакъ −, ибо $(dS)_T$ означаетъ измѣненіе энтропіи въ изотермическомъ процессѣ при возрастаніи давленія, т.е. при движеніи отъ D къ A; энтропія уменьшается при этомъ на dS.

$$dp\cdot(dv)_p = -dT\cdot(dS)_T;$$

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = -\left(\frac{dS}{dp}\right)_T$$

III) S и v незав. перем.: $dp = BC_1 = (dp)_v$, $h_3 = dv$, $dT = -(dT)_S$
Знакъ − стоитъ потому, что при $dv = +$ мы перемѣщались по $S = const$ отъ B къ A.

$$(dp)_v\cdot dv = -(dT)_S\, dS;$$

$$\left(\frac{dp}{dS}\right)_v = -\left(\frac{dT}{dv}\right)_S$$

IV) S и p незав. пер.: $dv = BC_1 = (dv)_p$, $h_4 = dp$, $dT = (dT)_S$

$$dp\cdot(dv)_p = (dT)_S\, dS;$$

$$\left(\frac{dv}{dS}\right)_p = \left(\frac{dT}{dp}\right)_S$$

§39. Покажемъ приложеніе нѣкоторыхъ формулъ. Отыщемъ для воды измѣненіе теплоемкости при постоянномъ давленіи въ зависимости отъ этого давленія, пользуясь соотношеніемъ:

$$\frac{dc_p}{dp} = -T\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p$$

Здѣсь C_p выражено въ термахъ; раздѣливъ его на механическій эквивалентъ, получимъ нашу теплоемкость въ калоріяхъ

$$\frac{C_p}{E} = c_p$$

$$C_p = E \cdot c_p$$

слѣд. $$\frac{dc_p}{dp} = - \frac{T}{E} \cdot \left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p$$

Хотя для воды мы не знаемъ уравненія состоянія, тѣмъ не менѣе $\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p$ найдемъ по тѣмъ эмпирическимъ формуламъ, какія устанавливаютъ связь между ея объемомъ и температурой. Мы воспользуемся формулой Коппа, справедливой между $t = 0°$ и $t = 25°C$.

$$v = \frac{1}{0{,}999\ 877} \left\{1 - \frac{6{,}1045}{10^5}\, t + \frac{7{,}7183}{10^6}\, t^2 - \frac{3{,}734\, t^3}{10^8}\right\}$$

гдѣ t температура по Цельзію и v объемъ 1 массы, т. е. 1 грамма. (Замѣтимъ что мы ввели C. G. S. систему мѣръ, а потому E должны выразить не въ килограммметрахъ а въ эргахъ. По Кирхгофу,

$$E = 4{,}167 .\ 10^7 \text{ эрговъ}$$

Формула Коппа даетъ для $t = 0°$

$$\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_{t=0} = 1{,}54 .\ 10^{-5}$$

Замѣтимъ здѣсь, что $dT = dt$ ибо $T = 273° + t$.

$$dc_p = - \int_{t=0}^{1} \frac{T}{E} \left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p dp$$

Положимъ

$$dp = 1^{atm} = 1033^{gr/\square cm} \times 980{,}9 = 1{,}013 .\ 10^6 \text{ dynes}$$

и $T_0 = (T)_{t=0} = 273°$. Сдѣлавъ подстановку и вычисляя имѣемъ

$$dc_p = -1,025.10^{-4}$$

Мы видимъ, что измѣненіе теплоемкости c_p при увеличеніи давленія на одну атмосферу очень малое и притомъ отрицательное.

Опредѣлимъ для воды разность $c_p - c_v$:

$$c_p - c_v = -\frac{T}{E}\cdot\frac{\left(\frac{dv}{dT}\right)_p^2}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_T}$$

по формулѣ (86).

По формулѣ Коппа для $t = 0°$

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = -6,1.10^{-5}$$

По Гросси сжатіе, т.е. измѣненіе 1 куб. сант. воды при измѣненіи давленія на 1 дину есть

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_T = 5.10^{-11}.$$

Отсюда найдемъ $c_p - c_v = 0,0005$.

Такъ какъ $c_p = 1$ грамкалорій, то

$$c_v = 0.9995$$

VI. Свойства различнаго рода діаграммъ.

§ 40. Положимъ, что мы имѣемъ діаграмму (p, v), на которой какой нибудь безконечно малый процессъ, изображается периметромъ безконечно малаго параллелограмма.

Допустимъ, что каждой парѣ параллельныхъ сторонъ соотвѣтствуетъ неизмѣняемость нѣкоторыхъ параметровъ, характеризующихъ состояніе системы. Такіе параметры означимъ черезъ x и y. Напримѣръ, процессы AB и CD характеризуются постоянствомъ $x + dx$ и x; процессы AD и BC постоянствомъ

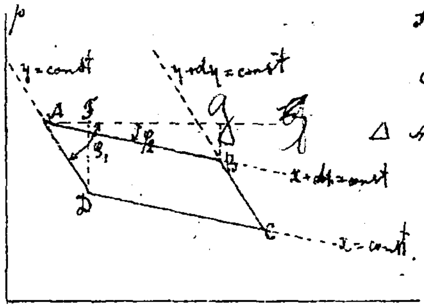
y и $y+dy$. Площадь параллелограмма $ABCD$ (обозначимъ ее f) равна

$$AD.AB \sin (DAB).$$

Если уголъ DAG назовемъ φ_1, уголъ $BAG = \varphi_2$ то $BAD = \varphi_1 - \varphi_2$ и
$f = AB.AD \sin(\varphi_1 - \varphi_2). =$

$$AB.AD \{ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \}.$$

Изъ Δ AFD заключимъ,



$$\sin\varphi_1 = \frac{FD}{AD}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{AF}{AD}$$

Δ ABG даетъ:

$$\sin\varphi_2 = \frac{BG}{AB}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{AG}{AB}$$

Слѣдовательно $f = DF.AG - AF.BG$.
Что же представляютъ наши величины DF, AG etc. etc.? Начнемъ съ DF. Это, очевидно, измѣненіе давленія отъ D до A. Такъ какъ переходъ отъ D до A совершается при $y = \text{const}$ и обусловливается измѣненіемъ x (въ точкѣ D) до $x+dx$ (въ точкѣ A) то

$$DF = \left(\frac{dp}{dx}\right)_y dx.$$

Совершенно аналогично находимъ

$$AG = \left(\frac{dp}{dy}\right)_x dy \text{ (переходъ отъ } A \text{ къ } B)$$

$$AF = -\left(\frac{dp}{dx}\right)_y dx \text{ (переходъ отъ } D \text{ къ } A)$$

$$BG = -\left(\frac{dp}{dy}\right)_x dy \text{ (переходъ отъ } A \text{ къ } B)$$

Умов. Механич. Теорія Теплоты.

Такъ какъ при переходѣ DA и AB v и p убываютъ, то $\frac{dv}{dx}$ и $\frac{dp}{dy}$ отрицательны, потому то мы и ввели (—), чтобы имѣть существенно положительныя величины линій AF и BG.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что

$$f = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy \ldots 112$$

Если бы мы имѣли конечный круговой процессъ, который изображался бы конечною замкнутою кривою, то, разбивая ограничиваемую ею площадь на безконечно малые четыреугольники, подобные только что разсмотрѣнному, всю работу процесса выразили бы интеграломъ отъ f. Та же площадь могла бы быть разбита на прямоугольники $dp . dv$ и представилась бы черезъ $W = \iint dp dv$.

Разсматривая p и v какъ функціи x и y, отсюда, пользуясь правиломъ замѣны однихъ независимыхъ перемѣнныхъ другими, мы преобразовали бы W въ $\iint f$ и такимъ путемъ нашли бы предъидущее выраженіе f.

Примѣнимъ нашу формулу къ частному случаю. Пусть $x = T$ $y = S$.

ABCD представитъ тогда безконечно малый циклъ Карно. Площадь, имъ ограничиваемая, равна, какъ мы знаемъ, $dT . dS$. Площадь представляетъ тепло, превращенное въ работу: на AB тепло поглощено $q_1 = (T + dT) dS$; на CD отдано $q_2 = T dS$; слѣд. въ работу превращено $q_1 - q_2 = dT . dS$, слѣд.

$$f = dT . dS = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\cdot\frac{dv}{dS} - \frac{\partial p}{\partial S}\cdot\frac{dv}{\partial S}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\right) dS . dT$$

или $$\frac{\partial p}{\partial T}\cdot\frac{\partial v}{\partial S} - \frac{\partial p}{\partial S}\cdot\frac{\partial v}{\partial T} = 1 \ldots\ldots\ldots 113$$

Это дополняетъ четыре найденныхъ выше соотнош. между производными нашихъ параметровъ.

§ 41. Положимъ теперь, что точки плоскости мы опредѣляемъ прямоугольной системой координатъ x, y. Тогда мы получаемъ діаграмму x, y.

Каждый процессъ представится нѣкоторой кривой; круговой процессъ представится кривой замкнутой. Спрашивается, какъ опредѣлится на этой діаграммѣ работа, затраченная или выигранная въ какомъ-нибудь замкнутомъ циклѣ?

Въ діаграммѣ (pv) это есть $\int f = \int dW = W$

Обозначимъ скобку во второй части (112) $- \gamma$ такъ что

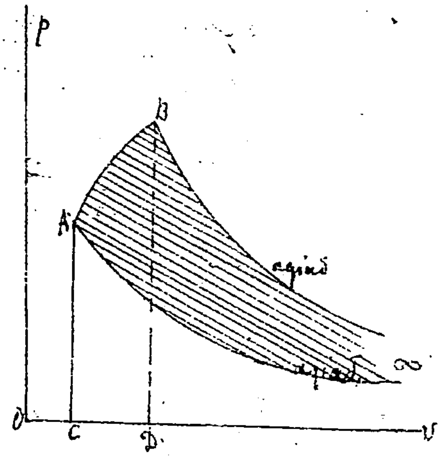
$f = \gamma\, dx\, dy$, тогда $\int dW = \int \gamma\, dx\, dy$

γ - наз. масштабомъ тепла или работы въ діаграммѣ.

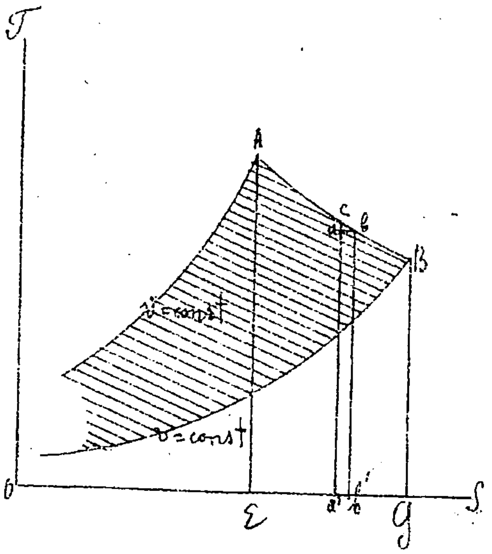
Работа не представится, какъ въ діаграммѣ p, v, площадью цикла; напротивъ того каждый, элементъ площади $dx\, dy$ долженъ быть измѣненъ въ отношеніи $\gamma : 1$, и сумма такихъ измѣненныхъ элементовъ площади даетъ работу. Отсюда и происходитъ наименованіе γ. Если x и y равны T и S то $\gamma = 1$. γ можно разсматривать, какъ плотность нѣкоторой массы, покрывающей координатную плоскость. При координатахъ p, v или T, S $\gamma = 1$: масса неизмѣняемой плотности. На этомъ основаніи мы представляемъ себѣ каждый замкнутый циклъ, какъ отрѣзокъ площади съ извѣстной массой, и переходъ отъ системы p, v или $S.T$ къ иной, опредѣлимъ, какъ такую деформацію плоскости, при которой плотность массъ въ каждомъ элементѣ площади изъ 1 обращается въ соотвѣтственное γ; при такой деформаціи кривыя $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ переходятъ въ систему взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ x и y; а p, v или $S.T$ (смотря потому, какая изъ этихъ діаграммъ подвергалась деформаціи) превращаются въ кривыя линіи.

§ 42. Разсмотримъ свойства нѣкоторыхъ діаграммъ. Наиболѣе употребительная изъ нихъ это (p, v), потому что она прямо даетъ работу, какъ площадь, ограниченную кривой превращеній, ординатами крайнихъ точекъ и Ov. Послѣднія три линіи, т. е. двѣ ординаты и Ov обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что на нихъ работа $= 0$; на ординатахъ потому что $dv = 0$, а на абсциссѣ Ov потому, что $p = 0$. Работа выражается площадью $F = \int p dv$.

Въ діаграммѣ же (ST) также удобно и легко выразится $\overset{2}{\text{работа}}$, какъ $\overset{1}{\text{тепло}}$ въ (p, v)



Именно въ безконечно маломъ пр. $ab\,a'b'$, $a'b' = dS$, а $ab = T$, слѣдов. площадь его выразится, какъ TdS; но TdS есть dQ, соотвѣтствующее процессу Cb; слѣд., Q въ разбираемой діаграммѣ опредѣлится, какъ площадь $ABEG$.



Эта площадь ограничена 1) линіей AB, затѣмъ 2) ординатами и OS. На линіяхъ AE и BG нѣтъ обмѣна тепла, ибо $dS = 0$, а EG есть линія абсолютнаго нуля. Итакъ, тепловой обмѣнъ имѣетъ мѣсто только на линіи AB.

Посмотримъ теперь, какъ опредѣлится тепло въ діаграммѣ $(p\, v)$.

$$dQ = dU + dW = \quad \text{или} \quad Q = U_B - U_A + F.$$

гдѣ F есть площадь $CABD$.

Для опредѣленія внутренней энергіи поступимъ такъ: проведемъ черезъ A и B двѣ адіабаты, которыя встрѣтятъ другъ друга и Ov въ безконечности, и разберемъ процессы, имъ соотвѣтствующіе.

Обмѣна тепла нѣтъ, слѣдов.:

на адіаб. $A\infty$ .... $0 = U_\infty - U_A$ + работ., выр. площ. $A\infty CA$

на адіаб. $B\infty$ .... $0 = U_\infty - U_B + B\infty DB$

или по вычитаніи второго изъ перваго: $U_B - U_A = B\infty DB - A\infty CA$;

слѣд., $Q = (F + B\infty DB) - A\infty CA$ = площади $AB\infty A$, которая заштрихована на чертежѣ.

Тепло въ діаграммѣ (p, v) выражается площадью, ограниченной кривой превращеній и двумя кривыми (адіабатами), простирающимися въ ∞.

Неудобство такого изображенія очевидно. Казенъ (Cazin) предложилъ другой: проведемъ изъ B адіабату, а изъ A изодинаму до ихъ взаимнаго пересѣченія; тогда

$$Q = U_B - U_A + F$$

Въ адіабатномъ процессѣ BC $dQ = 0$

$$U_A - U_B + \text{площ.}\,(BC,\, B'C') = 0.$$

или

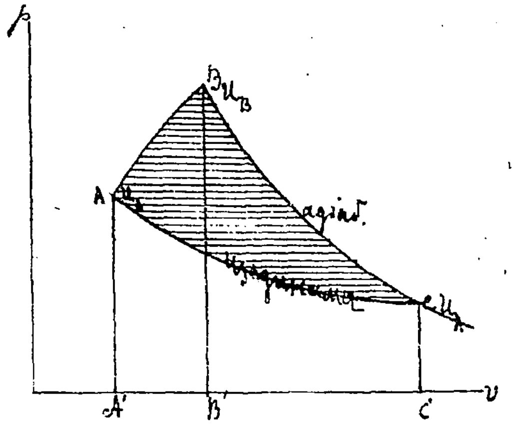
$$U_B - U_A = \text{площ.}\,(BCB'C')$$

слѣд. Q = площ. $(BCB'C') + F$ = площ. $(ABCA'B'C')$ (заштрихована).

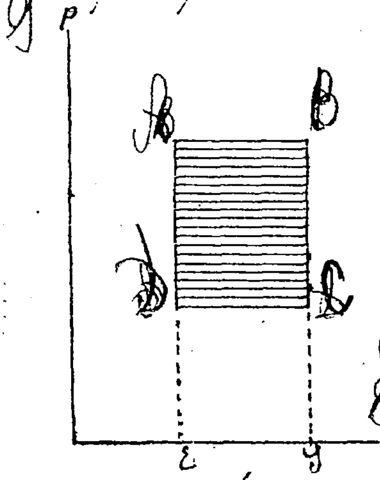
Аналогичное разсужденіе покажетъ намъ, что для опредѣленія работы въ діаграммѣ S, T необходимо провести двѣ изометры и измѣрять работу площадью, ограниченной этими кривыми и линіей превращеній.

Такъ какъ изометры эти пересѣкаются въ безконечности, то это представленіе работы неудобно и не употребляется.

Итакъ та и другая діаграммы съ удобств. представляютъ или тепло или работу.

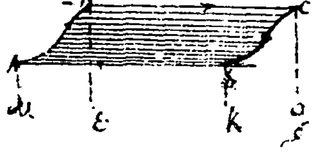


§. 43. Остановимся еще немного на разсмотрѣніи діаграммы (ST). Посмотримъ, какъ изобразится на ней циклъ Карно, который при координатахъ (p v) изображается криволинейнымъ $4^{\text{хъ}}$ угольникомъ, составленнымъ изъ двухъ изотермъ и двухъ адіабатъ. Въ данномъ случаѣ изотермы изображаются параллелями оси абсциссъ (T = const) а адіабаты параллелями оси ординатъ (S = const). Такимъ образомъ циклъ Карно представится на этой діаграммѣ прямоугольникомъ ABCD. Тепло, принимаемое тѣломъ на первой изотермѣ AB есть: $Q_1 = \int T dS$, ибо $TdS = dQ$. На чертежѣ Q_1 есть площадь ABEG.



Тепло, отдаваемое на второй изотермѣ Q_2 = площ. CDEG. Разность $Q_1 - Q_2$ = площ. ABCD — есть тепло, превращаемое въ работу

Существуютъ еще машины съ полнымъ генераторомъ тепла. Такія въ діаграммѣ (ST) представляются очень просто. Онѣ состоятъ изъ $2^{\text{хъ}}$ изотермическихъ процессовъ) и $2^{\text{хъ}}$ совершенно подобныхъ между собою процессовъ, которые на діаграммѣ изображаются вполнѣ подобными кривыми AC и BD. Обмѣнъ тепла здѣсь происходитъ во всѣхъ процессахъ. Сначала на AB тѣло беретъ тепло, на BD отдаетъ, на



CD отдаетъ и на AC опять принимаетъ. Когда количество тепла равно на діаграммѣ соотвѣтствующей площади: такъ въ процессѣ AB, $Q_1 = ABEG$, на BD – $Q_2 = BGKD$; на CD – $Q_3 = DLMC$ и на $AC = AEMC$. Такъ какъ процессы BD и CA совершенно аналогичны, то тепло, отдаваемое тѣмъ на одномъ изъ нихъ, совершенно возстановляется другимъ процессомъ, на которомъ тепло получается. Поэтому въ результатѣ обмѣнъ происходитъ, какъ будто только на $2^{\text{хъ}}$ изотермическихъ процессахъ; разность теплотъ получаемыхъ и отдаваемыхъ на нихъ и производитъ работу, которая представится площадью ABDC.

§ 44. Мы останавливались на процессахъ изотермическихъ ($T=\text{const}$) изопиестическихъ ($p=\text{const.}$), изометрическихъ ($v=\text{const}$) изэнтропическихъ ($S=\text{const.}$) и изодинамическихъ ($u=\text{const.}$) Нѣкоторые изъ этихъ процессовъ въ соотвѣтственныхъ діаграммахъ выражались прямыми линіями. Спросимъ, нельзя ли построить такую діаграмму, въ которой всѣ упомянутые процессы выразились бы прямыми линіями? Для того, чтобы построить такую діаграмму, надо знать свойства тѣла, для котораго она строится. Для совершенно идеальнаго газа такая діаграмма получается очень просто. Для газа имѣемъ характеристическое уравненіе:

$$pv = RT \;(1);$$

Внутр. энерг. $\quad U = C_v T + \text{const.} \;(2)$

Энтропія $\quad S = \lg(p^{C_v} v^{C_p}) + \text{const.} \;(3)$

Составимъ lg-ы отъ этихъ выраженій такимъ образомъ:

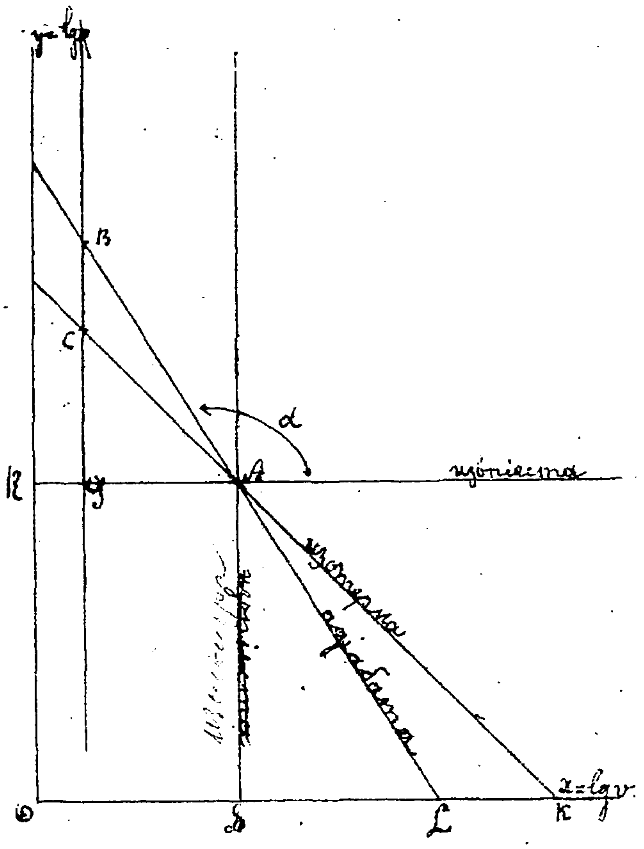
$$\left.\begin{aligned} &\lg p + \lg v = \lg R + \lg T \;(4) \\ &\lg U = \lg C_v + \lg T + \text{Const} \;(5 \\ &S = C_v \lg p + C_p \lg v + \text{Const} \;(6 \end{aligned}\right\} \;- - - .114.$$

Изъ этихъ ур-ій видимъ, что lg p, lg v, lg T, lg U и S находятся въ линейной зависимости между собою и что lg T и lg U играютъ одинаковую роль. Такъ изъ ур. (5) если T = const, то и U = const, т. е. изотерма и изоунама совпадаютъ. Поэтому изъ двухъ переменныхъ T или U удержимъ только U. Выбравши изъ оставшихся lg-ческихъ ур-ій за независимыя переменныя 2 какія-нибудь, мы получимъ въ соответственной діаграммѣ выраженіе всѣхъ процессовъ прямыми линіями. Будемъ считать $x = \lg v$ и $y = \lg p$ (оси такъ выбираемъ и строимъ діаграммы). Полагая $x = const$, получаемъ изометру, $y = const$ – изопіесту (AD и AR) 1-ая параллельна оси y, 2-ая оси x. Для изотермы $T = const$, правая часть ур. (4) = пост., и отсюда получаемъ $x + y = const$, т. е. изотерма есть прямая, отсѣкающая отъ осей равные отрѣзки. (AK) Для изэнтропы $S = const$ ур. (6) получаемъ видъ:

$$C_v y + C_p x = const,$$

которое и будетъ ур-іе адіабаты AL. Это прямая, уголъ наклоненія которой къ оси x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = -\frac{C_p}{C_v} = -1,41$$



(для двухатомныхъ газовъ.)

Изодинама газовъ, какъ знаемъ, уже совпадаетъ съ изотермой. Итакъ, всѣ процессы на нашей діаграммѣ изобразились прямыми. Пересѣчемъ всѣ эти прямыя изометрой BCQ. Тогда изъ соотвѣтственныхъ получимъ:

$BQ = - AQ\,tg\,\alpha = AQ\frac{C_p}{C_v}$; но $AQ = CQ$ по свойству изотермы, слѣд.

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{C_p}{C_v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 114.a.$$

т.е. пучекъ, состоящій изъ изопіесты, изотермы, и изэнтропы дѣлитъ всѣ изометры на части отношенія которыхъ $= \frac{C_p}{C_v}$.

VII. Механическія аналогіи.

§ 45. Остановимъ теперь наше вниманіе на аналогіяхъ термическихъ процессовъ съ нѣкоторыми механическими. Эти аналогіи изложены въ статьѣ Гельмгольтца о моноциклахъ въ 97 т. Journal für reine und angewandte Mathematik von Crelle. Для вывода свойствъ моноциклическихъ системъ Гельмгольтцъ пользуется уравненіями Лагранжа во $2^{ой}$ формѣ. Мы обойдемъ ихъ въ приведенномъ ниже случаѣ, и потому рѣшимъ сперва слѣдующую задачу.

Пусть въ плоскости координатъ x, y движется точка m съ массой m, подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: одной направленной по рад.-вектору къ началу координатъ, и другой ей перпендикулярной.

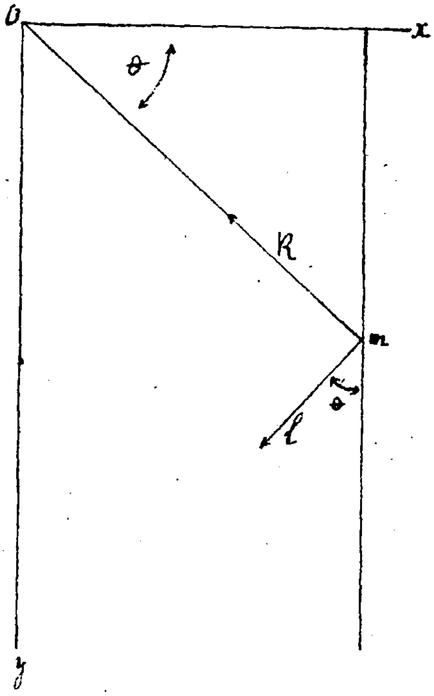
Назовемъ om черезъ r, $1^{ю}$ силу черезъ R, $2^{ю}$ черезъ E. Замѣтимъ, что $\cos a = \frac{x}{r}$ и $\sin a = \frac{y}{r}$.

Уравненіе движенія точки въ $1^{й}$ формѣ Лагранжа:

(a) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-l\frac{y}{r}-R\frac{x}{r}$ (слагающ. по осямъ)

(b) $m\frac{d^2y}{dt^2}=l\frac{x}{r}-R\frac{y}{r}$; Исключимъ изъ этихъ двухъ урав. l и R; для этого сначала умножимъ ур. (a) на y, ур. (b) на x и вычитаемъ ур (a) изъ ур. (b), а затѣмъ умнож. (a) на x и (b) на y и складываемъ (приним. во вниманіе что $x^2+y^2=r^2$), получимъ:

$m\left\{x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right\}=lr$ (c) и $m\left\{x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=-Rr$ (d)



Легко сообразить слѣдующія преобразованія этихъ 2-хъ уравненій $m\left\{\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dy}{dt}\right)\right\}=lr$, или, такъ какъ, $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}$

Именно:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)=r^2\cos^2\theta\,\frac{d\,\mathrm{tang}\,\theta}{dt}=$$

$$=\frac{r^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$; а $\frac{d\theta}{dt}$ = угловой

скорости вращенія около точки O равно w (e). Слѣд., $m\frac{d}{dt}(r^2w)=lr$ и далѣе:

$$lr=mr^2w'+2mrr'w \quad . \; . \; . \; . \; 115$$

гдѣ r' и w' суть производныя отъ r и w по времени. Для R получаемъ:

$$m\left\{\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)-\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\right.=-Rr$$ и, такъ

какъ $r^2=x^2+y^2$ и $rr'=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}$, $m\left\{\frac{d}{dt}(rr')-r^2w^2-r'^2\right\}=$

$= m\left(r'^2 + rr'' - r^2w^2 - r'^2\right) = -Rr$ и окончательно:

$$-R = mr'' - mr^2w^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 116$$

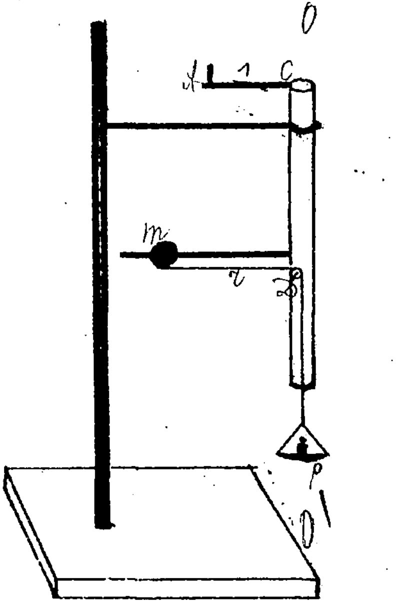
Предъидущее преобразованіе основано на выраженіи <u>живой силы</u>:

$T = \frac{1}{2} mv^2$, но $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 =$ квадрату скорости вращенія точки около O + квадратъ скорости по вектору $r = (wr)^2 + (r')^2 = r^2w^2 + r'^2$ (это и подставимъ въ выраженіе $-Rr$).

Итакъ

$$T = \frac{1}{2} mr^2w^2 + \frac{1}{2} mr'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 117$$

$1^{\text{ый}}$ членъ есть живая сила вращенія точки, $2^{\text{й}}$ — скольженія по вектору. Итакъ, мы имѣемъ теперь полное представленіе о движеніи точки m. Осуществимъ его на модели: Представимъ себѣ вертикальный полный цилиндръ, который можетъ вращаться около вертикальной оси OO, съ помощью рукоятки AC, длина коей отъ оси вращенія равна единицѣ.



Къ цилиндру съ боку придѣланъ стержень, на которомъ находится подвижной шарикъ m съ каналомъ внутри, такъ что шарикъ можетъ скользить по стержню, причемъ разстояніе r его центра отъ оси OO' можетъ мѣняться. Отъ шарика идетъ нить ~~тор~~ проходящая черезъ прорѣзъ въ цилиндрѣ и спускающаяся черезъ блокъ внизъ по оси OO. Къ ней подвѣшена чашка, на которую можно класть грузы p.

Всѣ части прибора предполагаются движущимися безъ тренія и не имѣющими массы кромѣ шарика m, представляющаго матеріальную точку m въ предъидущемъ разсужденіи. Вращая рукоятку, мы дѣйствуемъ на m силой ⊥ къ r, моментъ этой силы есть ℓr; грузъ же тянетъ шарикъ по r къ оси трубки, это есть сила R. Съ помощью этой модели можно составить механическіе образцы термодинамическихъ процессовъ.

Посмотримъ, какова работа, затрачиваемая на вращеніе рукоятки; она равна $\ell \frac{ds}{dt} dt$, гдѣ ds есть путь, проходимый точкой m въ безконечно малый промежутокъ времени dt. Но $ds = r d\theta$, поэтому работа $\ell r \frac{d\theta}{dt} dt = \ell r w dt$. Замѣнимъ ℓr изъ (115); тогда затраченная или сообщенная извнѣ работа dQ равна:

$$dQ = w(mr^2 dw + 2mrw\,dr) = mr^2 w\,dw + 2mrw^2 dr \;.\;.\;.\;.\;.\; (118a)$$

Вынесемъ здѣсь за скобку выраженіе живой силы вращат. движенія, т.е. $\frac{mr^2w^2}{2}$; тогда $dQ = \frac{mr^2w^2}{2}\left(2\frac{dw}{w} + 4\frac{dr}{r}\right)$

$$dQ = \frac{mr^2w^2}{2} d\lg(w^2r^4) \;.\;.\;.\;.\; (118)$$

Мы имѣемъ здѣсь двѣ координаты — одну уголъ θ, сдѣланный рукояткой съ какою-нибудь вертикальною плоскостью, проходящей черезъ ось OO', и другую — r. Вслѣдствіе измѣненія первой, масса m описываетъ замкнутый путь; это есть циклическая координата. Мы будемъ принимать, что угловая скорость w есть величина очень большая. Но измѣненіе w съ временемъ мы будемъ считать весьма малымъ, т. е. моментъ вч будетъ измѣнять медленно. Точно также мы очень медленно будемъ измѣнять грузы p, вслѣдствіе чего r' и r'' будетъ малы. Итакъ съ динамической стороны наша система характеризуется тѣмъ, что циклическая координата a измѣняется вслѣдствіе величины w чрезвычайно быстро, въ то время, какъ другая перемѣнная r измѣняется очень медленно. Система, обладающая такими свойствами, наз. моноцикломъ. Системы, содержащія нѣсколько циклическихъ координатъ, наз. полициклами. Въ обращаемыхъ термодинамическихъ процессахъ перемѣнныя T (температура) и v (объемъ) измѣняются чрезвычайно медленно. И здѣсь перемѣнныя w и r, характеризующія нашъ моноциклъ во всѣхъ операціяхъ, которыя мы будемъ надъ ними производить, измѣняются также, по условію, очень медленно. Измѣненіе r соотвѣтствуетъ измѣненію объема системы, т. е. приближенію или удаленію массы m отъ оси OO'. Въ выраженіи T (живой силы) (117) можно пренебречь вторымъ членомъ, вслѣдствіе сдѣланныхъ условій. Въ выраженіи R (116) по тому же самому можно пренебречь 1-мъ членомъ съ r''. Итакъ получаемъ (грузъ p соотвѣтствуетъ силѣ R):

$$p = m r w^2 \quad и \quad T = \frac{1}{2} m r^2 w^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (119\ a\ и\ b)$$

Изъ этихъ 2-хъ ур. слѣдуетъ

$$p = \frac{2T}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (119\ c)$$

Дальше

$$dQ = T\, d\lg\,(r^4 w^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (118\ a)$$

Въ послѣднемъ соотношеніи T есть интегрирующій дѣлитель $1^{\text{а}}$ части, т. е. $\frac{dQ}{T}$ есть полный дифференціалъ. Таким образомъ частное изъ работы dQ, сообщенной системѣ извнѣ на ея живую силу есть полный дифференціалъ: эта теорема аналогична второму закону термодинамики.

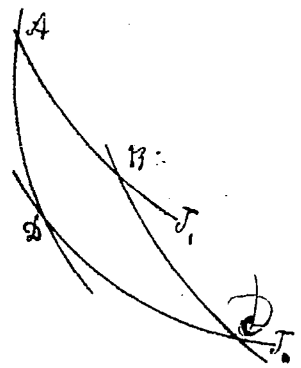
Пусть мы дѣйствуемъ на рукоятку съ силой $Z = br$, а грузъ p постепенно уменьшаемъ.

<u>I-ый процессъ</u>. Мы можемъ такъ регулировать уменьшеніе силы Z и груза p, что живая сила T во все время оста- неизмѣнной, а разстояніе r, т. е. объемъ системы увеличивается; система расширяется при неизмѣнной живой силѣ.

Это есть процессъ $T = const$; по аналогіи мы назовемъ его изотермическимъ или изодинамическимъ. Если $T = const$, то

$r^2w^2 = const$, $rw = const$, ... (120)

т. е. произведеніе r на угловую скорость во все время постоянно. Если возьмемъ оси координатъ (r и w), то процессъ $rw = const$ выразится равносторонней гиперболой AB, какъ въ газахъ изотермическій процессъ. Здѣсь роль объема играетъ r, роль давленія газа w. При увеличеніи r у насъ происходитъ поднятіе груза. Работа сообщаемая при этомъ извнѣ (работа силы Z) (118a): $dQ = mr^2w\,dw + 2mw^2r\,dr = d(\frac{1}{2}mr^2w^2) + mw^2r\,dr$.



или

$dQ = dT + p\,dr$. . . . . 120 a

Это выраженіе аналогично 1ому закону термодинамики: извнѣ сообщаемая энергія dQ идетъ на измѣненіе внутренней энергіи dT и на внѣшнюю работу.

Таким образомъ въ процессѣ

въ которомъ живая сила постоянна, т. е. $dT=0$ вся работа идетъ на поднятіе груза, т. е. $Q=\int p\,dr$, какъ въ изотермическомъ процессѣ для газовъ $Q=\int p\,dv$.

II-й процессъ. Устранимъ силу Z и предоставимъ системѣ двигаться по инерціи; теперь извнѣ сообщаемой работы нѣтъ, а потому здѣсь $dQ=0$. Процессъ соотвѣтствуетъ адіабатному, или изэнтропному.

Тогда $lg\,(r^4w^2)=$ const, а слѣдов. и $r^4w^2=$ const.

$$\text{и } r^2w=\text{const} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (121)$$

Это есть уравненіе процесса; оно изображается кривою BD, болѣе круто спускающеюся къ оси ~~общихъ~~ абсциссъ.

Такъ какъ отъ B къ D r увеличивается, т. е. система расширяется, то грузъ будетъ подниматься, но работа на это движеніе заимствуется изъ живой силы системы; такъ какъ здѣсь $dT+p\,dr=0$, то знакъ dT всегда противуположенъ знаку $p\,dr$. Если r увеличивается, $dr=+$ . . . . (121a) $dT=-$, т. е. живая сила уменьшается и наоборотъ. Мы видимъ, что въ выраженіи (118 a) можно $lg\,r^4w^2$ разсматривать какъ параметръ адіабатнаго процесса, т. е. какъ величину аналогичную энтропіи. Итакъ $\frac{dQ}{T}$ въ нашей системѣ представляетъ приростъ энтропіи. Изъ 2-хъ разсмотрѣнныхъ процессовъ можно составить замкнутый процессъ, аналогичный циклу Карно.

Сначала идетъ изотермическій процессъ AB; w - угловая скорость уменьшается и r увеличивается, p поднимается, $T=$ const. На этомъ процессѣ мы дѣйствуемъ на рукоятку силою Z и сообщаемъ системѣ работу извнѣ. Если бы r оставалось безъ измѣненія, то въ результатѣ мы имѣли бы возрастаніе живой силы системы; но r увеличиваясь,

и при томъ подымается грузъ p; работа этого поднятія а не приростъ живой^{3} силы поглощаютъ работу dQ силы Z. Имѣемъ **отсюда** по (110) и (119 c) $r_A w_A = r_B w_B$ (a и **b**)
$Q = \int p\,dr = 2T_1\int_A^B \frac{dr}{r}$ (b_1) (аналогично теплу въ процессѣ изотермическомъ)

$$Q_1 = 2T_1 \lg\left(\frac{r_B}{r_A}\right) \dots (b_2)$$

Устранимъ затѣмъ внѣшнюю силу Z и предоставимъ системѣ вращаться по инерціи; процессъ адіабатный по BD. Тогда $r_B^2 w_B = r_D^2 w_D$ (c); $dQ = 0$.
Затѣмъ снова дѣйствуемъ силой Z, но въ обратномъ направленіи, тормозя постепенно движеніе системы по инерціи, но увеличиваемъ постепенно грузъ p такъ, чтобы живая сила системы $T = \frac{pr}{2}$ оставалась неизмѣнной. Здѣсь мы не сообщаемъ системѣ работы извнѣ, а наоборотъ беремъ работу изъ системы, т.е. $dQ = -$. Тормозя движеніе системы мы уменьшаемъ w, т.е. угловую скорость вращенія, но накладывая грузы p мы уменьшаемъ r, вслѣдствіе чего w увеличивается, ибо опредѣленная линейная скорость переносится все ближе и ближе къ оси вращенія. Такъ что съ увеличеніемъ p, мы имѣемъ уменьшеніе r и возростаніе w. Но регулируемъ нарастаніе p такъ, чтобы $pr = const$ и $rw = const$. Процессъ проходитъ по изотермѣ DC и получаемъ

$$r_D w_D = r_C w_C \ (d) \text{ и } Q_2 = 2T_0\int_D^C \frac{dr}{r}\ ; (e');\ Q_0 = 2T_0 \lg\left(\frac{r_C}{r_D}\right) = 2T_0 \lg\left(\frac{r_D}{r_C}\right) \dots (e)$$

Убираемъ снова силу Z и предоставляемъ модели вращаться по инерціи, получимъ процессъ адіабатный AC; тогда имѣемъ соотношенія:

$$r_c^2 W_c = r_D^2 W_D \quad (e) \quad и \quad dQ = 0!$$

Къ какому результату мы въ концѣ концовъ пришли? Въ процессѣ ABD грузъ p поднимается вверхъ, въ DCA—онъ опускается. Разность работъ, при этомъ совершаемыхъ, и есть работа, выигрываемая нами въ замкнутомъ ~~про~~процессѣ. Въ первомъ процессѣ работа сообщалась системѣ, во второмъ она поглощалась тормозящей дѣйствіе силой.

Перемножая соотношенія (a, c, d, f), по сокращеніи получимъ: $r_B \cdot r_c = r_D \cdot r_A$, или $\frac{r_B}{r_A} = \frac{r_D}{r_c}$ (g).

Сопоставляя (g, b и c), получимъ:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} = 0.$$

Q_0, какъ мы видѣли, есть величина отрицательная: это есть работа, отданная тѣломъ, поэтому замѣняя Q_0 черезъ $-Q_0'$, получимъ:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_0'}{T_0} = 0 \quad \dots\dots (122)$$

— выраженіе 2^го закона термодинамики.

Изъ соотношенія (122) можно получить

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0'}{T_0} = \frac{Q_1 - Q_0'}{T_1 - T_0} \quad \dots\dots (122а)$$

или

$$Q_1 - Q_0' = Q_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1} \quad \dots\dots (122б)$$

— выигранная работа въ нашемъ процессѣ.

Сравнивая выраженіе (122б) съ выраженіемъ экономическаго коэффиціента работы термическихъ машинъ, видимъ, что они аналогичны.

Этимъ закончимъ краткій очеркъ о моноциклахъ Гельмгольца. Послѣдній аналогію моноцикловъ съ термическими процессами провелъ дальше. Приложеніе моноцикловъ къ другимъ явленіямъ, напр. электрическимъ, мы находимъ у Больцманна.

Умовъ. Механ. теорія теплоты.

Аналогію $2^{\text{го}}$ закона термодинамики съ началомъ наименьшаго дѣйствія мы не будемъ касаться.

VIII. Приложеніе термодинамики къ измѣненію физическаго состоянія тѣлъ.

§46. Разсмотримъ теперь случай, когда процессы, происходящіе въ тѣлѣ, сопровождаются измѣненіемъ его физическаго состоянія. Пусть въ системѣ находится одно и то-же вещество въ двухъ различныхъ состояніяхъ, или фазахъ (въ жидкомъ и парообразномъ состояніи, въ твердомъ и жидкомъ, въ твердомъ и парообразномъ, въ твердомъ состояніи и въ растворѣ, въ твердомъ состояніи и его аллотропическомъ измѣненіи, напр. бѣлый и красный фосфоръ, и т. д.).

Пусть масса вещества $= 1^{\text{кг}}$ (1kg).

Допустимъ, что часть массы, находящейся въ $I^{\text{ой}}$ фазѣ есть x, тогда во $II^{\text{ой}}$ фазѣ масса $= 1-x$. Назовемъ черезъ s — удѣльный объемъ (объемъ $1^{\text{кг}}$ массы) массы въ $I^{\text{ой}}$ фазѣ, и черезъ σ — уд. объемъ массы во $II^{\text{ой}}$ фазѣ.

Тогда $x s$ — объемъ вещества въ $I^{\text{ой}}$ фазѣ и $(1-x)\sigma$ — во $II^{\text{ой}}$ фазѣ. Весь объемъ вещества

$$v = xs + (1-x)\sigma \quad \cdots\cdots\cdots \quad (123)$$

Принимаемъ, что давленіе p, подъ которымъ находится наша система есть функція только температуры ϑ. При этомъ условіи s и σ суть функціи только температуры ϑ (собственно функціи p и ϑ, но $p=f(\vartheta)$).

Разсмотримъ, изъ какихъ частей состоитъ dQ — количество тепла, которымъ наша смѣсь обмѣнивается съ окружающей средою. Если X — количество теплоты, которое нужно сообщить веществу при неизмѣнной температурѣ для перевода единицы его массы изъ $II^{\text{ой}}$ фазы въ $I^{\text{ую}}$, то $X.dx$ — тепло, потребное для увеличенія массы x первой фазы на величину dx, вслѣдствіе превращенія части вещества во второй фазѣ.

X называется скрытой теплотой превращенія изъ II^ой фазы въ I^ую.

Пусть Y - кол. теплоты, сообщаемое всей двухфазной системѣ и отнесенное къ 1 массы при отсутствіи превращеній состоянія и расходуемое на повышеніе температуры смѣси на 1°; при повышеніи тем-ры на $d\vartheta$ сообщаемъ $Yd\vartheta$ теплоты. Теперь dQ выражается такъ:

$$dQ = X\,dx + Y\,d\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (123\beta)$$

Въ этой формулѣ X выражается въ единицахъ работы, въ терміяхъ; въ калоріяхъ оно есть $r = \frac{X}{E}$, гдѣ E - механическій эквивалентъ теплоты.

Y въ свою очередь можетъ быть представленъ въ слѣд. видѣ:

$$Y = Hx + C(1-x) \quad \ldots\ldots \quad (123\gamma)$$

гдѣ H — теплоемкость вещества въ I^ой фазѣ,
C " " во II^ой " .

H и C выражены въ терміяхъ; въ калоріяхъ они выражаются: $H = Eh$ и $C = Ec$.

Въ случаѣ пара и жидкости: H - удѣльная теплота насыщеннаго пара при данной температурѣ, C - уд. теплота жидкости.

Выше подъ № 92 имѣли формулу

$$\left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)_v = \left(\frac{ds}{dv}\right)_\vartheta$$

Такъ какъ p исключительно функція отъ ϑ, то индексъ v можемъ опустить. Вспоминая, что $ds = \frac{dQ}{\vartheta}$ и пользуясь формулой (123β) при $\vartheta = Const.$, мы имѣемъ

$$(ds)_\vartheta = \frac{X\,dx}{\vartheta}.$$

Формула (123a) даетъ:

$$(dv)_\vartheta = s\,dx - \sigma\,dx = (s-\sigma)\,dx.$$

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)_\vartheta = \frac{X}{(s-\sigma)\vartheta} \quad \text{и} \quad \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{X}{\vartheta(s-\sigma)}$$

Выражая X въ калоріяхъ, получимъ

$$r = \frac{T}{E}(s-\sigma)\frac{dp}{dT} \quad \ldots\ldots\ldots (124)$$

— соотношеніе (найденное Clapeyron'омъ въ 1834 г., но съ тою разницею, что вмѣсто T стояла неизвѣстная функція температуры. Въ приведенной формѣ оно дано одновременно Клаузіусомъ и Ранкиномъ) соотношеніе между скрытою теплотою при переходѣ изъ $II^{ой}$ фазы въ $I^{ую}$ и измѣненіемъ упругости съ температурой.

Если $s > \sigma$, т.е. удѣльный объемъ $I^{ой}$ фазы больше уд. объема $II^{ой}$ фазы, то $s-\sigma = +$; r имѣетъ опредѣленный знакъ въ зависимости отъ знака $\frac{dp}{dT}$; положимъ, что $r = +$ (напр., при испареніи жидкости). Для обратнаго превращенія r будетъ $-$ (напр., при конденсаціи пара); поэтому, чтобы представить скрытую теплоту превращенія изъ $I^{ой}$ фазы во $II^{ую}$ достаточно переставить знаки s и σ въ выраженіи r.

Подставляя dQ по формулѣ (123, α) въ $dS = \frac{dQ}{T}$, получимъ

$$dS = \frac{X}{T}dx + \frac{Y}{T}dT.$$

Такъ какъ dS — полный дифференціалъ, то

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{T}\right) = \frac{d}{dT}\left(\frac{X}{T}\right).$$

Вставляя Y изъ формулы (123 β), имѣемъ по дифференцированіи и умноженіи на T

$$H - C = -\frac{X}{T} + \frac{dX}{dT}$$

Но $H = Eh$, $C = Ec$, $X = Er$. Слѣд.

$$h = c + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}$$

или

$$h = c + T\frac{d\frac{r}{T}}{dT} \quad \ldots\ldots (125)$$

Ур. (124) и (125) характеризуютъ процессы, происходящіе въ нашей смѣси.

§47. Испареніе.

Разсмотримъ случай, когда $II^{ая}$ фаза есть жидкое состояніе

вещества, $I^{ая}$ фаза - парообразное состояніе его.
Въ этомъ случаѣ ϑ есть температура насыщеннаго пара упругости p или температура кипѣнія подъ давленіемъ p.
Для того, чтобы нагрѣть жидкость отъ 0° до t°C. нужно ей сообщить, положимъ, тепла q ($1^{цы}$ массы); для того, чтобы выпарить ее при $t°$, нужно сообщить количество тепла r, называемое скрытой теплотой пара; $q+r=h$ называется полнымъ количествомъ теплоты жидкости. Это r состоитъ изъ двухъ частей: одна содержится въ самомъ парѣ, другая часть идетъ на внѣшнюю работу, сопровождающую парообразованіе, т.е. на работу, затрачиваемую для побѣжденія внѣшняго давленія p при увеличеніи объема; p есть вмѣстѣ съ тѣмъ и упругость пара при данной температурѣ.
Работа = давленію на измѣненіе объема:

$$p.dv = p(s-\sigma),$$

т. к. объемъ σ переходитъ въ s. Въ калоріяхъ $\frac{p(s-\sigma)}{E}$.
Это количество теплоты, затрачиваемое на побѣжденіе внѣшняго давленія, т.е. это вторая часть r; а первая часть, обозначаемая черезъ ρ и называемая внутренней скрытой теплотой пара, есть

$$\rho = r - \frac{p(s-\sigma)}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . (126)$$

Разсмотримъ случай воды и пара.
Т. к. уравненіе состоянія для насыщеннаго пара намъ неизвѣстно, то для опредѣленія $\frac{dp}{d\vartheta}$ (въ форм. 124) приходится пользоваться эмпирическими формулами.
Реньо далъ слѣдующую:

$$lg p = a + b\alpha^{\tau} + c\beta^{\tau},$$

гдѣ $\tau = t - t_0$ и t - температура, для которой ищется p.
Зная $\frac{dp}{d\vartheta}$, легко вычислить $s-\sigma$ изъ форм.(124), а (126) даетъ намъ величину ρ.

Мы выше имѣли, что полное количество теплоты жидкост

$$\lambda = r + q \quad \text{или} \quad r = \lambda - q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (127).$$

Для воды Реньо далъ формулу

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\,t,$$

гдѣ t отсчитывается по воздушному термометру въ градусахъ Цельсія отъ обычнаго нуля. Для воды $q = t$, или болѣе точная формула $q = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3$. Вставляя эти величины λ и q въ формулу (127), получаемъ

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3$$

(см. Zeuner: Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie).

Clausius предложилъ болѣе простую формулу, но вполнѣ удовлетворительную:

$$r = \lambda - q = 607 - 0{,}608\,t.$$

Опредѣляя изъ формулы Цейнера r, $\frac{dr}{dt}$ и вставляя q въ формулу (125), мы получаемъ для воды

$$hT = -523{,}23 + t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3$$

По Цейнеру для эфира

$$hT = 28{,}85 + 0{,}2275\,t - 0{,}00002596\,t^2$$

Изъ первой формулы величина h — удѣльная теплота водяныхъ паровъ — оказывается отрицательной, именно при 0°C $h = -1{,}9166$, при 100° $h = -1{,}1533$, при 200° $h = -0{,}6766$.

Для эфира-же h имѣетъ положительный знакъ.

Для нѣкоторыхъ жидкостей h при извѣстной температурѣ мѣняетъ знакъ. Напр, для хлороформа при $t < 130°$ $h = -$, при $t > 130°$ $h = +$.

Пояснимъ смыслъ знака при h.

Положимъ, что мы желаемъ повысить температуру смѣси ($dT = +$), сохраняя въ ней прежнія количества пара и жидкости, причемъ паръ остается попрежнему насыщеннымъ; тогда $dx = 0$, и формула (123 β) даетъ въ калоріяхъ, если $x = 1$,

$$dQ = h\,dT = -$$

Т. к. h — отрицательно и dT положительно, то dQ —

величина отрицательная. Это значитъ, что при повышеніи температуры пара воды необходимо, для того чтобы онъ оставался насыщеннымъ, отнимать отъ него теплоту. Нагрѣвая паръ, мы выведемъ его изъ состоянія насыщенія; сжимая его для повышенія температуры, мы его перегрѣемъ. Сжимая его и вмѣстѣ съ тѣмъ отнимая тепло, мы получимъ желаемое повышеніе температуры: чтобы уничтожить перегрѣваніе, тепла* придется отнять меньше, чѣмъ сколько развивается при сжатіи.
Для паровъ эѳира $dQ = +$, т. к. $h = +$; т. е. для повышенія температуры пара, сохраняя его насыщеннымъ, нужно подводить тепло, другими словами - нагрѣвать пары.
Разсмотримъ процессъ, когда вообще $dx = 0$, т. е. нѣтъ измѣненія въ фазахъ.
Пусть вся жидкость перешла въ паръ, такъ что можемъ принять $x = 1$, тогда, какъ только что имѣли,

$$dQ = h . dT$$

Удѣльный объемъ пара s.
Измѣненіе объема v можемъ представить:

$$dv = \frac{ds}{dT} dT, \text{ или } dT = \frac{dT}{ds} dv$$

Поэтому

$$dQ = h \frac{dT}{ds} dv.$$

Для паровъ всякой жидкости* съ повышеніемъ температуры удѣльный объемъ уменьшается и обратно, такъ что $\frac{dT}{ds}$ — отрицательная величина.
Увеличиваемъ объемъ: $dv = +$, $\frac{dT}{ds} = -$ и

$$dQ = h \frac{dT}{ds} dv = + \quad (\text{для воды, ибо } h = -)$$

и $dQ = -$ для эѳира.
Заключаемъ, что при увеличеніи объема водяныхъ паровъ, для того чтобы сохранялось ихъ насыщенное состояніе, нужно имъ сообщить нѣкоторое количество тепла; въ противномъ случаѣ произошла-бы конден-

сація паровъ. При уменьшеніи объема ($dv = -$) нужно отнять тепло, чтобы паръ остались насыщенными.
Для эфира имѣемъ обратное явленіе.

Разсмотримъ явленія въ адіабатномъ процессѣ.

Пространство съ насыщенными парами заключаемъ въ оболочку, недопускающую тепловаго обмѣна, т.е. $dQ = 0$.
Формула (123β) даетъ

$$X dx + Y dT = 0, \text{ или}$$

$$r dx + h dT = 0, \text{ или } \frac{dT}{dx} = -\frac{r}{x}.$$

По форм. (123α) при $x = 1$ (дѣлаемъ предположеніе, что жидкости нѣтъ, а только насыщенный паръ), имѣемъ

$$dv = s dx + ds, \text{ или } \frac{dv}{dx} = s + \frac{ds}{dT} \cdot \frac{dT}{dx}$$

и подставляя $\frac{dT}{dx} = -\frac{r}{x}$

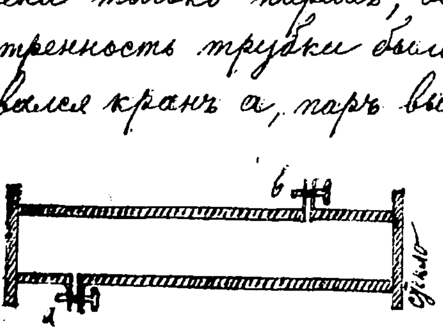
$$\frac{dv}{dx} = s - \frac{r}{h} \cdot \frac{ds}{dT}.$$

$\frac{dT}{ds}$ или $\frac{ds}{dT} = -$ и $h = -$ (для воды); изъ s вычитается положительная величина; вычисляя найдемъ

$$\frac{dv}{dx} = -$$

т.е. если увеличиваемъ объемъ ($dv = +$) водяныхъ паровъ (въ адіаб. пр.), то количество ихъ ($dx = -$) уменьшается, слѣд., происходитъ конденсація паровъ.

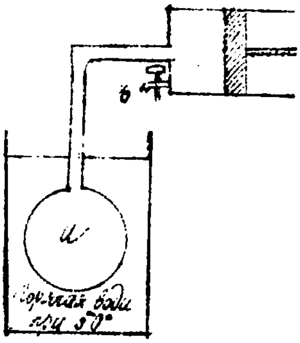
Гирнъ провѣрилъ это на опытѣ.
Онъ бралъ мѣдную, закрытую у концовъ стеклянными пластинками, трубку съ кранами a и $в$; черезъ трубку пропускалась изъ котла струя насыщеннаго пара, и когда весь воздухъ былъ удаленъ и трубка была наполнена только паромъ, оба крана закрывались. Внутренность трубки была прозрачна. Затѣмъ открывался кранъ a, паръ вытекалъ, происходило расширеніе объема, и чрезъ стекло наблюдался туманъ, т.е. получалась конденсація.



Для паровъ эфира $\frac{dv}{dx} = +$

(ибо $h = +$), и мы можемъ сказать: расширеніе паровъ эфир. въ адіабатномъ процессѣ сопровождается новымъ образованіемъ паровъ, или, при отсутствіи жидкости, ихъ перегрѣваніемъ; при сжатіи паровъ ($dv = -$), они конденсируются, ибо тогда $dx = +$.

Этотъ выводъ подтверждаетъ другой опытъ Гирна.



Въ баллонѣ а нагрѣвается эфиръ; вмѣстѣ съ его парами выгоняется воздухъ; по удаленіи послѣдняго закрывается кранъ в. Быстро сжимая поршнемъ (адіаб. проц.) насыщенные пары эфира, получаемъ облако, — т.е. произошла конденсація. Открывая кранъ, получаемъ быстрое расширеніе паровъ, и баллонъ остается прозрачнымъ.

Сѣрнистый углеродъ даетъ явленіе обратное.

§48. Плавленіе.

Приложимъ теперь формулы (124) и (125) къ случаю смѣси твердаго тѣла и жидкаго.

$\mathfrak{T}$ будетъ температура превращенія твердаго тѣла ($\text{II}^{\text{ая}}$ фаза) въ жидкое ($\text{I}^{\text{ая}}$ фаза) подъ давленіемъ p; слѣд., это есть соотвѣтственная p температура плавленія твердаго тѣла.

Формулу (124) можемъ написать въ видѣ

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dp} = \frac{\mathfrak{T}(s-\sigma)}{E\cdot r} \quad \cdots\cdots (129)$$

Въ случаѣ льда-воды:

r — скрытая теплота плавленія льда,
s — объемъ $1^{\text{цы}}$ массы воды,
σ — объемъ $1^{\text{цы}}$ массы льда.

Вода принадлежитъ къ той группѣ тѣлъ, объемъ которыхъ при плавленіи уменьшается, т.е. $s < \sigma$, и мы имѣемъ: $\frac{d\mathfrak{T}}{dp} = -$, т.е. при повышеніи давленія температура плавленія понижается.

Такъ какъ измѣненія удѣльнаго объема какъ твердаго, такъ и жидкаго тѣла съ измѣненіемъ p. невелики, то можемъ разсматривать правую часть выраженія (129) независимой отъ p, и измѣненіе точки плавленія представится:

$$\Delta\vartheta = \frac{\vartheta(s-\sigma)}{E}\Delta p \; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (130)$$

Для льда эта формула дастъ при $\Delta p = 1$ atm. $= 10334$ kgr. на mt.² и нач. тем-ръ плавленія въ 0°:

$$\Delta\vartheta = \frac{273(0{,}001-0{,}001087)\cdot 10334}{424\cdot 79{,}5} = -0{,}0073°C = -\frac{1}{137}°C,$$

т.е. съ повышеніемъ давленія температура плавленія льда понижается. Это обстоятельство, какъ извѣстно, объясняетъ явленія смерзанія льда подъ давленіемъ (регель) и движеніе ледниковъ.

Томсонъ провѣрялъ измѣненіе точки плавленія льда на опытѣ и получилъ:

Давлен.(atm.)	Δt (на опытѣ)	Δt (изъ форм.)
8,1	−0,059°	−0,059°
16,1	−0,129°	−0,123°

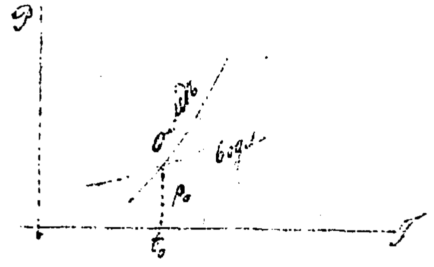
Опыты Гопкинса подтверждаютъ нашу формулу (130) и для другой группы тѣлъ (воскъ, парафинъ, спермацетъ), у которыхъ $s > \sigma$ и $\Delta\vartheta = +$. Для воска онъ получилъ температуру плавленія въ 80°,2 при давленіи въ 792 atm. (температура плавленія подъ давленіемъ атмосферы 64°,5). Отсюда заключаемъ, что при давленіи въ 30000 atm. воскъ плавился-бы только при температурѣ въ 600°C (температура краснаго каленія).

Эти изслѣдованія позволяютъ намъ думать, что тѣла внутри земли могутъ существовать въ твердомъ видѣ, несмотря на высокую температуру, такъ какъ точка плавленія ихъ будетъ сиде выше вслѣдствіе громаднаго давленія внутри земли (на глубинѣ 100 km.

давленіе въ 30000 atm., - воскъ не расплавится, если температура ниже 600°C.)

§49. Не разсмотреннымъ еще остался случай непосредственнаго испаренія изъ твердаго состоянія (ледъ, камфора, іодъ).

Реньо изслѣдовалъ упругость водяныхъ паровъ ниже 0° до $-30°$ (для переохлажденной воды). Если на діаграммѣ (p, ϑ) представимъ кривыми 1) зависимость между упругостью и температурой пара въ присутствіи воды и 2) зависимость между упругостью и температурой пара въ присутствіи льда, то является вопросъ, совпадаютъ-ли они, или-же не совпадаютъ. Подъ давленіемъ атмосферы ледъ плавится при 0°C. При этомъ упругость пара $p_0 = 4{,}57$ ртутн. миллим. Она измѣняется мало съ небольшимъ пониженіемъ температуры. Мы можемъ поэтому спросить себя, при какой температурѣ ледъ будетъ плавится подъ давленіемъ паровъ въ 4,57 ртутн. mm. Эта температура соотвѣтствуетъ пониженію точки плавленія льда при уменьшеніи давленія на 1 atm. По предыдущему эта температура $t_0 = -0{,}0073°C$. Итакъ при t_0 ледъ плавится подъ давленіемъ p_0, т.е. при этихъ условіяхъ температуры и давленія одновременно существуютъ паръ, вода, ледъ. Поэтому



точка О (p_0, ϑ_0) есть общая для обѣихъ кривыхъ. Поэтому о ходѣ кривыхъ можемъ судить по направленію касательныхъ въ точкѣ С.

Для первой кривой тангенсъ угла касательной съ осью ϑ пропорціоналенъ

$$\left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)_{\text{пар и воды}} = \frac{rE}{\vartheta(s-\sigma)} \quad \dots \text{по форм. (129)}$$

гдѣ r — скрытая теплота пара (испаренія);

для второй кривой

$$\left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)_{\text{паръ льда}} = \frac{(r_0+r)E}{\vartheta(1-\sigma_0)},$$

(гдѣ σ_0 — удѣльный объемъ льда), такъ какъ скрытая теплота испаренія льда = скрытой теплотѣ r_0 плавленія льда + скрытая теплота r испаренія воды, полученной отъ плавленія.

Разность тангенсовъ угловъ для t_0, близкому къ 0°, пренебрегая σ и σ_0 передъ 1, пропорціональна разности

$$\left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)_{л} - \left(\frac{dp}{d\vartheta}\right)_{в} = \frac{r_0 E}{\vartheta 1} = \frac{79{,}5.424}{273.205} = \frac{0{,}599^{\,kgr}}{1^\circ C} = \alpha.$$

Слѣд., касательныя, проведенныя къ обѣимъ кривымъ въ точкѣ O, не совпадаютъ; поэтому обѣ кривыя пересѣкаются въ точкѣ O,- слѣд., онѣ различны.

Въ предыдущемъ p выражалось въ килограммахъ на кв. метръ, а объемъ въ кубическихъ метрахъ.

Переведемъ p въ ртутные mm.

$$10334\,\text{kgr.} — 760^{\,mm.};\quad 1\,\text{kgr.} = \frac{760}{10334}^{\,mm.}$$

Умножаемъ обѣ части предыдущаго выраженія на этотъ коэффиціентъ; слѣва p выразится въ mm., и

$$-\frac{0{,}599.760}{10334} = \frac{0{,}044^{\,mm.}}{1^\circ C.};\qquad \alpha = \frac{0{,}044^{\,mm.}}{1^\circ C.}$$

Теперь имѣемъ: $(dp)_л - (dp)_в = \frac{0{,}044}{1^\circ}\,d\vartheta.$

Так. обр. получили возможность судить о разности упругостей ниже нуля; положимъ, считая отъ t_0 = почти 0°C, $d\vartheta = -1^\circ C$; тогда прямо получаемъ разность ординатъ для точекъ, абсциссы которыхъ $= -1^\circ$ влѣво отъ t_0:

$$(dp)_л - (dp)_в = -0{,}044^{\,mm.}$$

Въ самомъ дѣлѣ, прибавляя $\pm p_0$, найдемъ:

$$(p_0 + dp_л) - (p_0 + dp_в) = -0{,}044^{\,mm.},\ \text{или}$$

$$(p_л - p_в)_{t=-1^\circ C} = -0{,}044^{\,mm.},$$

т.е. упругость пара льда при температурахъ ниже 0° меньше упругости пара воды.

Съ этой задачей въ болѣе общей формѣ мы встрѣтимся далѣе.

§50. Мы сдѣлаемъ еще одно приложеніе формулы

$$r = \frac{T}{E}(s-\sigma)\frac{dp}{dT} \quad \cdots\cdots \quad (124)$$

гдѣ r будемъ считать скрытой теплотой испаренія. Обратимъ вниманіе на то, что при ~~испареніи~~ повышеніи температуры плотность насыщеннаго пара жидкости всегда увеличивается, а плотность жидкости уменьшается. Что-же происходитъ съ удѣльными объемами пара — s и жидкости — σ? Если плотность пара увеличивается, то объемъ s единицы массы уменьшается, если плотность жидкости уменьшается, то объемъ σ увеличивается. Слѣд., съ повышеніемъ температуры эти удѣльные объемы стремятся къ равенству. Та температура, при которой тѣло изъ жидкаго состоянія непрерывно переходитъ въ газообразное, называется *критической* температурой данной жидкости. Если положимъ $s = \sigma$, то получаемъ $r = 0$. Слѣд., *скрытая теплота испаренія для критической температуры равна 0.*

r есть функція температуры, слѣд., если-бы она была извѣстна, то изъ ур. $r = 0$ можно было-бы вычислить критическую температуру.

IX. Изысканіе уравненій состоянія тѣлъ.

§51. Разсмотрѣнныя выше явленія показываютъ всю важность знанія зависимости между величинами r, $s-\sigma$, p и T. Для составленія эмпирическихъ формулъ, представляющихъ эти величины, существуетъ много путей, основанныхъ на догадкахъ: такъ напр., было составлено много различныхъ формулъ для скрытой теплоты испаренія, упругости пара и др. Но при составленіи такихъ формулъ желательно всегда руководствоваться теоретическими соображеніями по крайней мѣрѣ постольку, поскольку это въ нашихъ силахъ.

Мы теперь обратимся къ изложенію такихъ схематическихъ пріемовъ, которые нужно всегда имѣть передъ собою при подобныхъ изысканіяхъ.

При изысканіи законовъ парообразнаго состоянія мы можемъ пользоваться слѣдующими соображеніями.

Нагрѣваемъ тѣло въ жидкомъ состояніи отъ начальной температуры $\mathcal{T}_0$ до какой-нб. $\mathcal{T}$; при этомъ произойдетъ измѣненіе внутренней энергіи $= U_{\mathcal{T}_0}^{\mathcal{T}}$; энтропія тоже получаетъ приростъ $\mathcal{S}_{\mathcal{T}_0}^{\mathcal{T}}$. Превращаемъ тѣло при температурѣ $\mathcal{T}$ изъ жидкаго состоянія въ насыщенный паръ: энергія его получитъ еще приростъ $U_{\mathcal{T}}$, а энтропія увеличится на $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. Послѣ перехода всего тѣла въ насыщенный паръ увеличиваемъ его температуру отъ $\mathcal{T}$ до $\mathcal{T}_1$, при чемъ энергія тѣла поднимется на $U_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}_1}$, а энтропія на $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}_1}$. Но мы знаемъ изъ термодинамики, что приросты U и $\mathcal{S}$ зависятъ только отъ начальнаго и конечнаго состоянія тѣла. Слѣд., суммируя всѣ приросты энергіи и энтропіи въ тѣлѣ, мы можемъ написать, что

$$U_{\mathcal{T}_0}^{\mathcal{T}} + U_{\mathcal{T}} + U_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}_1} = f(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1) \quad \ldots\ldots\ldots (131)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{T}_0}^{\mathcal{T}} + \mathcal{S}_{\mathcal{T}} + \mathcal{S}_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}_1} = \psi(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1) \quad \ldots\ldots\ldots (132)$$

Мы видимъ, что первыя части не должны зависѣть отъ промежуточной температуры $\mathcal{T}$; это замѣчаніе можетъ дать основу для составленія представленія о свойствахъ насыщенныхъ паровъ.

Таковъ пріемъ Бертрана (J. Bertrand, Thermodinamique 1887). Займемся его изложеніемъ.

Для внутренней энергіи совершеннаго газа мы имѣли выраженіе:

$$U = C_v(\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) + U_0 \quad \ldots\ldots\ldots (131a)$$

гдѣ U_0 есть нѣкоторое начальное значеніе U.

Затѣмъ у насъ была формула (63):

$$dQ = c_v . dT + p . dv.$$

Дѣля на T и замѣняя $\frac{dQ}{T}$ черезъ dS, а $\frac{p}{T}$ черезъ $\frac{R}{v}$ по закону Бойля и Шарля, имѣемъ для газа:

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

Интегрируя между двумя состояніями газа T_0 и T, получаемъ

$$S = c_v \lg \frac{T}{T_0} + R \lg \frac{v}{v_0} + S_0 \cdots (132a)$$

Относительно этихъ двухъ выраженій U и S надо замѣтить, что они выведены въ предположеніи, что все выражается въ единицахъ работы, но скрытую теплоту r мы будемъ выражать въ единицахъ тепла, а потому мы должны и остальныя единицы выразить въ тепловыхъ единицахъ; съ этою цѣлью въ (131a) достаточно считать c_v и U_0 выраженными въ калоріяхъ, а (132a) нужно раздѣлить на механическій эквивалентъ тепла E, причемъ дѣлителя E при c_v и S не будемъ писать, а прямо будемъ считать, что они выражаются въ калоріяхъ; тогда E придется сохранить только въ членѣ съ R, и

$$S = c_v \lg \frac{T}{T_0} + \frac{R}{E} \lg \frac{v}{v_0} + S_0 \cdots (132b)$$

Посмотримъ, какъ представятся U и S для жидкости. Общее выраженіе для dQ есть

$$dQ = dU + p . dv$$

или, приводя къ единицамъ тепловымъ,

$$dQ = dU + \frac{p}{E} dv.$$

Но мы знаемъ, что жидкости весьма мало измѣняютъ свои объемы въ зависимости отъ давленія p; поэтому для жидкости можно принять, что все измѣненіе тепла идетъ на подъемъ внутренней энергіи жидкости, внѣшняя-же работа $p . dv$ и ничтожна; тогда пренебрегая членомъ $\frac{p}{E}dv$, можемъ написать, что

$$dQ = dU = c\cdot dT \cdots\cdots\cdots (133a)$$

Интегрируя это выраженіе, находимъ

$$U = C(T-T_0) + U_0 \cdots\cdots\cdots (133)$$

Для жидкости выраженіе энтропіи есть

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Если сюда подставить dQ изъ (133а), имѣемъ

$$dS = C\frac{dT}{T}$$

Интегрируемъ его въ предположеніи, что $C = Const.$

$$S = C\lg\frac{T}{T_0} + S_0 \cdots\cdots\cdots (134)$$

- Найдемъ теперь выраженія внутренней энергіи пара и энтропіи его. Мы предполагаемъ, что все тѣло находится въ парообразномъ состояніи, - въ состояніи насыщеннаго пара, и что масса его равна единицѣ. Для того, чтобы единицу массы жидкости обратить въ паръ, нужно затратить r единицъ тепла. При этомъ будетъ произведена внѣшняя работа. Помня, что v измѣняется отъ объема жидкости σ до объема пара s (а p остается неизмѣннымъ, т.к. для перехода жидкости въ насыщенный паръ оно есть функція T, а $T = Const.$), получаемъ для внѣшней работы въ калоріяхъ:

$$\frac{p}{E}\int_\sigma^s dv = \frac{p}{E}(s-\sigma)$$

Слѣд., энергія пара по формулѣ $U = Q - \int\frac{p\,dv}{E}$, гдѣ $Q = r$, представится:

$$U = r - \frac{p}{E}(s-\sigma) + U_0 \cdots\cdots\cdots (135)$$

Подобнымъ образомъ можно найти выраженіе энтропіи нашего пара:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{r\cdot dx}{T}$$

Здѣсь dS есть измѣненіе энтропіи, когда масса жидкости dx обращается въ паръ.

Т.к. r и T, какъ функціи температуры, остаются неизмѣнными при интегрированіи по dx отъ 0 до 1, пишемъ, что

$$S = \frac{r}{T} + S_0 \quad \ldots\ldots\ldots (136)$$

Положимъ, имѣется у насъ единица массы жидкости, которую мы нагрѣваемъ отъ T_0 до T; тогда энергія ея возрастетъ на величину $c(T - T_0) + \text{Const.}$ (выраженіе постояннаго напишемъ потомъ). Затѣмъ эту жидкость при температурѣ T переводимъ въ паръ; тогда энергія возрастетъ на $r - \frac{p}{E}(s - \sigma)$. Теперь этотъ паръ мы нагрѣваемъ до T_1; т. к. паръ, выходя изъ состоянія насыщенія, приблизительно обладаетъ свойствомъ идеальныхъ газовъ, то отъ нагрѣванія получимъ приростъ энергіи на $C_v(T_1 - T) + \text{Const.}$ Весь приростъ энергіи въ такомъ процессѣ представится суммою этихъ отдѣльныхъ приростовъ; поэтому получимъ:

$$c(T - T_0) + r - \frac{p}{E}(s - \sigma) + C_v(T_1 - T) + \text{Const.} \quad \ldots (\alpha)$$

(Въ Const.'ѣ заключаются всѣ постоянныя изъ выраженій (133), (135) и послѣдняго C').

Также можно расчленить полный приростъ энтропіи въ тѣлѣ. Когда оно, будучи въ жидкомъ состояніи, нагрѣвается отъ T_0 до T (температуры парообразованія), получаетъ приростъ энтропіи (по 134), равный $c \lg \frac{T}{T_0} + \text{Const.}$ При переходѣ изъ жидкаго состоянія въ насыщенный паръ, энтропія возрастаетъ (по 136) на $\frac{r}{T} + \text{Const.}$ (T во все время перехода въ паръ остается постояннымъ). При нагрѣваніи пара отъ T до T_1, энтропія увеличивается ~~на~~ (по 132 b) на

$$c \lg \frac{T}{T_0} + \frac{r}{T} + c_v \lg \frac{T_1}{T} + \frac{R}{E} \lg \frac{v_1}{v} + \text{Const.} \quad \ldots (\beta)$$

Эти два выраженія (α) и (β) не должны зависѣть, какъ было указано выше, отъ промежуточной температуры T. Поэтому, если мы соберемъ всѣ члены, зависящіе отъ T, то сумма ихъ должна быть Const., и мы получимъ нѣкоторую зависимость между T, r, c_v.

Изъ (α) получаемъ (по первому закону)

$$c\mathcal{T} + r - \frac{p}{E}(s-\sigma) - c_v\mathcal{T} = Const. \quad \ldots\ldots (\alpha')$$

или замѣнивъ по закону Бойля и Шарля $ps = R\mathcal{T}$ и пренебрегая объемомъ σ сравнительно съ объемомъ пара s, найдемъ:

$$c\mathcal{T} + r - \frac{R\mathcal{T}}{E} - c_v\mathcal{T} = Const. \quad \ldots\ldots (137\alpha)$$

Изъ (β) получаемъ такимъ-же способомъ:

$$c\lg\mathcal{T} + \frac{r}{\mathcal{T}} - c_v\lg\mathcal{T} - \frac{R}{E}\lg s = Const. \quad \ldots (138)$$

Вотъ какимъ условіямъ долженъ приблизительно удовлетворять насыщенный паръ; говоримъ: *приблизительно*, т. к. мы предположили, что отъ состоянія насыщенія далѣе паръ слѣдуетъ закону Маріотта и Гей-Люссака. Опредѣляя изъ (137α) величину r и замѣняя въ коэффиціентѣ при $\mathcal{T}$ величину $\frac{R}{E}$ величиной $\frac{R}{E} = c_p - c_v$ (форм. 54), получимъ:

$$r = Const. - (C - C_p)\mathcal{T} \quad \ldots\ldots (137).$$

Эта зависимость должна быть близка къ природѣ, и дѣйствительно формула Clausius'а близко подходитъ къ только что выведенной; слѣд., мы имѣемъ здѣсь приблизительную зависимость между скрытой теплотой испаренія и температурой $\mathcal{T}$. Эта зависимость есть линейная.

Не дастъ-ли намъ формула (138) возможности представить соотношеніе между упругостью пара p и температурой $\mathcal{T}$?

Изъ (137) видно, что скрытая теплота пара r есть линейная функція одного $\mathcal{T}$; слѣд.,

$$r = \alpha + \beta\mathcal{T}.$$

Если эту величину вставимъ въ (138) и опредѣлимъ оттуда $\lg s$, то получимъ

$$\lg s = Const. + \frac{E\beta}{R} + \frac{\alpha}{\mathcal{T}} + \frac{E(c-c_v)}{R}\lg\mathcal{T}, \text{ или}$$

$$\lg s = a + \frac{b}{\mathcal{T}} + c\lg\mathcal{T} \quad \ldots\ldots (138\alpha)$$

(Здѣсь s есть удѣльный объемъ.)

По нашему предположенію, которое допускало аналогію между перегрѣтымъ паромъ и идеальными газомъ, мы можемъ написать, логарифмируя основное соотношеніе $RT=ps$,

$$\lg p + \lg s = \lg R + \lg T.$$

Вставляя величину $\lg s$ изъ (138 a), мы приведемъ выраженіе $\lg p$ къ формулѣ

$$\lg p = a + \frac{b}{T} + c \lg T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Дюпре впервые (см. его курсъ термодинамики) далъ подобную-же формулу для зависимости упругости насыщеннаго пара и его температуры, исходя изъ другихъ соображеній. Формула Дюпре очень близка къ дѣйствительности.

Для контраста съ ея простотой напишемъ формулу Реньо, выведенную эмпирическимъ путемъ. Она такова:

$$\lg p = a - b\alpha^{\tau} + c\beta^{\tau},$$

гдѣ τ линейно зависитъ отъ температуры.

Не говоря уже о томъ, что вычисленія по ней очень длинны, но и вмѣсто трехъ постоянныхъ, входящихъ въ форм. (139), имѣемъ въ послѣдней пять постоянныхъ; для облегченія пользованія ею въ случаѣ паровъ воды Цейнеръ далъ слѣдующія формулы:

$a = 4,7393707$

$\lg(b \cdot \alpha^{t}) = 0,6117408 - 0,003274463t$

$\lg(c \beta^{t}) = -1,8680093 + 0,006864937t.$

Упругость водяного пара для температуры t, считаемой отъ обыкновеннаго 0°, получаемъ тогда въ ртутныхъ миллиметрахъ.

Формула Дюпре съ коэффиціентами, данными Бертраномъ есть:

$$\lg p = 17,94324 - \frac{2795}{T} - 3,8682 \lg T.$$

Она даетъ для p величины весьма мало отличныя отъ вычисляемыхъ по формулѣ Реньо.

Бертраномъ указаны еще и другія формулы, напр.

$$p = g\frac{T^m}{(T+c)^n}$$

гдѣ g, m, n, c суть постоянныя, тоже хорошо воспроизводящій данныя опыта.

Приложеніе предыдущихъ формулъ къ парамъ различныхъ жидкостей находимъ въ курсѣ Бертрана.

Представимъ краткое рѣшеніе того же вопроса Кирхгофомъ.

Мы имѣли выраженіе (135) внутренней энергіи пара:

$$U = r - \frac{p}{E}(s-\sigma) + U_0.$$

Полагая, какъ и раньше, что послѣ состоянія насыщенія перегрѣтый паръ слѣдуетъ закону Маріотта и Гей-Люссака (приблизительно), приравниваемъ это выраженіе (135) энергіи газа $c_v T + Const.$; тогда имѣемъ

$$r = c_v T + \frac{p}{E}(s-\sigma) - cT + Const.$$

Здѣсь пренебрегаемъ удѣльнымъ объемомъ жидкости и, замѣняя упругость пара p изъ формулы Маріотта и Ге-Люссака $ps = RT$, получимъ

$$r = Const - \left(c - c_v - \frac{R}{E}\right)T.$$

Подставляемъ $\frac{R}{E} = c_p - c_v$ и находимъ

$$r = Const. - (c - c_p)T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (137)$$

Это — формула, найденная Бертраномъ (см. выше 137).

Посмотримъ, что мы получимъ для упругости насыщеннаго пара. Мы немного выше писали такое соотношеніе

$$r - c_v T - \frac{p}{E}(s-\sigma) + cT = Const.$$

Внесемъ сюда выраженіе r изъ (124), т.е.

$$r = \frac{T}{E}(s-\sigma)\frac{dp}{dT}$$

$$\frac{T}{E}(s-\sigma)\frac{dp}{dT} + (c - c_v)T - \frac{p}{E}(s-\sigma) + Const. = 0$$

$$\left(T\frac{dp}{dT} - p\right)\frac{s-\sigma}{E} + (c-c_v)T + Const. = 0.$$

Здѣсь мы можемъ сначала пренебречь удѣльнымъ объемомъ жидкости σ сравнительно съ s, а затѣмъ изъ соотношенія $p.s = RT$ замѣнить s черезъ $\frac{RT}{p}$; тогда получимъ, раздѣливъ все выраженіе на $\frac{RT}{E}$:

$$\left(\mathfrak{T}\frac{dp}{d\mathfrak{T}}-p\right)\frac{1}{p}+\frac{c-c_v}{\frac{R}{E}}+\frac{Const.}{\mathfrak{T}}=0.$$

Вносяр подъ знакъ ( ) и замѣняя $\frac{R}{E}=c_p-c_v$ и наконецъ все умножая на $\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$, получимъ

$$\frac{dp}{p}-\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}+\frac{c-c_v}{c_p-c_v}\cdot\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}+Const.\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}^2}=0$$

Или соединяя второй и третій члены, находимъ

$$\frac{dp}{p}+\frac{c-c_p}{c_p-c_v}\cdot\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}+Const.\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}^2}=0.$$

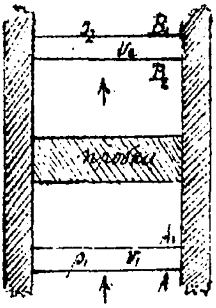
Интегрируя это выраженіе, находимъ

$$lg\,p=Const.+\frac{b}{\mathfrak{T}}-\frac{c-c_p}{c_p-c_v}lg\,\mathfrak{T}.$$

Это — та формула, которую даетъ Кирхгофъ для упругости насыщенныхъ паровъ; она отличается отъ подобной-же формулы (139) тѣмъ только, что тамъ три постоянныхъ, а у Кирхгофа только два, т. к. c, c_p, c_v даются изъ опыта.
Hertz вывелъ такую-же формулу самостоятельно и затѣмъ примѣнилъ её для опредѣленія упругости ртутныхъ паровъ при 20°C., для того чтобы судить о томъ разрѣженіи, которое достигается ртутными насосами при обыкновенной комнатной температурѣ. Онъ нашелъ, что упругость ртутныхъ паровъ при температурѣ около 20°C, т.е. предѣльная упругость, которая можетъ быть достигнута ртутными насосами, есть 0,0013 рт. мм.

§52. Перейдемъ теперь къ газамъ.

Мы до сихъ поръ принимали за уравненіе состоянія для газовъ — уравненіе Маріотта и Гей-Люссака, распространяя его и на перегрѣтые пары, но оказывается, что эта формула не вполнѣ точная. Уклоненіе ~~ея~~ отъ нея атмосфернаго воздуха обнаруживается слѣдующимъ опытомъ Джауля и Томсона. Была взята деревянная (для меньшей теплопроводности) цилиндрическая трубка, и въ нее вогнана была пробка изъ ваты, или шелка. Черезъ нее медленно продавливается газъ въ направленіи стрѣлокъ; если-бы онъ строго



слѣдовалъ закону Маріотта и Гей-Люссака, то температура газа передъ пробкой и за ней, какъ мы увидимъ, должна-бы быть одинаковой.

Имѣемъ 2 сѣченія A и B и давленія p_1 и p_2. Черезъ нѣкоторое время устанавливается стаціонарное перетеченіе газа.

Обратимъ вниманіе на состояніе газа послѣ того, какъ между нѣкоторыми моментами времени будетъ продавлена единица массы газа черезъ пробку; тогда сѣченіе A передвинется въ A_1, а сѣченіе B въ B_1. Такъ какъ у насъ стаціонарное теченіе, то масса газа въ AA_1 равна прошедшей черезъ пробку и той, которая заняла объемъ BB_1. Слѣд., эта масса $= 1$. Вслѣдствіе медленности теченія газа мы можемъ пренебречь живою силою его теченія, и первый законъ термодинамики напишется попрежнему:

$$dQ = dU + p.dv.$$

Послѣ интеграціи, называя измѣненіе энергіи газа черезъ ΔU, получимъ

$$Q = \Delta U + \Delta W,$$

гдѣ ΔW есть внѣшняя работа, совершенная газомъ при протеченіи $1^{\text{цы}}$ массы черезъ пробку.

Т. к. газъ окруженъ дурными проводниками и извнѣ не доставляется тепло, тепло-же, развивающееся отъ тренія газа въ пробкѣ, вслѣдствіе ея дурной проводимости тоже почти не отдается окружающему пространству, то

$$Q = 0 \quad \text{и} \quad \Delta U + \Delta W = 0.$$

Если назовемъ черезъ s — площадь сѣченія цилиндра, то работа, отданная газу при вдавливаніи массы AA_1, равна произведенію $p_1 \cdot s$ на тотъ путь, который пройденъ изъ A въ A_1, т.е.

$$W_1 = p_1 \cdot s \cdot \overline{AA_1} = p_1 v_1 .$$

Точно также найдемъ, что работа, отданная газомъ при втеченіи $1^{цы}$ массы въ объемъ BB_1 есть

$$W_2 = p_2 \cdot s \cdot \overline{BB_1} = p_2 v_2 .$$

Слѣд.,

$$\Delta W = W_2 - W_1 = p_2 v_2 - p_1 v_1 .$$

Но разность упругостей газа $p_2 - p_1$ и разность объемовъ $v_2 - v_1$ очень мала, и мы можемъ принять, что

$$p_2 = p_1 + dp_1 = p + dp, \quad a \quad v_2 = v_1 + dv_1 = v + dv$$

Слѣд.,

$$W_2 - W_1 = d(pv) = \Delta W.$$

Т. к. сама работа безконечно мала, и степень малости зависитъ отъ начальныхъ данныхъ, то мы сохранимъ для работы дифференціальную форму, и тогда

$$dU + d(pv) = 0.$$

Вотъ это есть характеристика получившагося процесса. Послѣднее выраженіе мы можемъ представить такъ:

$$d(U + pv) = 0.$$

Но мы имѣли формулу (103 a)

$$d(U + pv) = C_p d\mathcal{T} + \left[v - \mathcal{T}\left(\frac{dv}{d\mathcal{T}}\right)_p\right] dp.$$

Слѣд., въ данномъ случаѣ

$$\frac{d\mathcal{T}}{dp} = \frac{1}{C_p}\left\{\mathcal{T}\left(\frac{dv}{d\mathcal{T}}\right)_p - v\right\} \quad \ldots\ldots \quad (140)$$

dp есть разность упругости газа передъ пробкой и за пробкой; поэтому $\frac{d\mathcal{T}}{dp}$ есть отношеніе между разностью температуръ (передъ пробкой и за ней) и разностью давленія газа по ту и другую сторону.

Если-бы газъ слѣдовалъ закону Маріотта и Гей-Люссака, то изъ $p\cdot v = R\cdot T$ нашли-бы, что

$$\left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \frac{R}{p},$$

и вставляя въ выраженіе для $\frac{dT}{dp}$, нашли-бы

$$\frac{dT}{dp} = 0.$$

Слѣд., температура по обѣ стороны пробки должна быть одинакова. Между тѣмъ опытъ показалъ, что эти температуры неодинаковы, хотя разность мала; слѣд., законъ Маріотта и Гей-Люссака не примѣняется въ точности къ воздуху.

Для того, чтобы найти общее уравненіе состоянія, надо найти зависимость между dT и dp.

Джауль и Томсонъ, наблюдая разности температуръ въ двухъ концахъ трубки, нашли эмпирически эту зависимость и представили въ формѣ:

$$\frac{T_1 - T_2}{p_1 - p_2} = \frac{a}{T_1^2} = \frac{dT}{dp}, \text{ гдѣ } a \text{ — нѣкоторое постоянное.}$$

Слѣд., изъ (140) имѣемъ

$$\frac{\alpha}{T^2} = \frac{1}{c_p}\left\{T\left(\frac{dv}{dT}\right)_p - v\right\}$$

Умножаемъ на c_p и дѣлимъ на T^2 обѣ части:

$$\frac{\left(\frac{dv}{dT}\right)_p}{T} - \frac{v}{T^2} = \frac{\alpha c_p}{T^4}.$$

Это можно представить еще такъ:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{v}{T}\right) = -\frac{d}{dT}\left(\frac{\alpha c_p}{3T^3}\right).$$

Интегрируя это выраженіе и прибавляя произвольную функцію отъ p, которое есть другая независимая перемѣнная, получимъ

$$\frac{v}{T} = -\frac{\alpha c_p}{3T^3} + f(p).$$

Эта функція $f(p)$ опредѣляется тѣмъ, что чѣмъ выше температура (т. е. первый членъ второй части дѣлается ничтожнымъ) и чѣмъ меньше давленіе, тѣмъ газы ближе слѣдуютъ закону Маріотта и Гей-Люссака, и слѣд., въ предѣльномъ случаѣ выраженіе $\frac{v}{T}$ должно обратиться въ то, которое получается изъ этого закона, т.е. $f(p) = \frac{R}{p}$, а потому

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{\alpha C_p}{3T^2}. \quad \ldots\ldots (141)$$

Вотъ тотъ законъ, который на основаніи опытовъ Томсона и Джауля становится на мѣсто закона Маріотта и Гей-Люссака.

При T значительномъ эти два закона равносильны.

§53. Первая попытка составить уравненіе состоянія - общее для тѣлъ твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ - была сдѣлана Ванъ-деръ-Ваальсомъ.

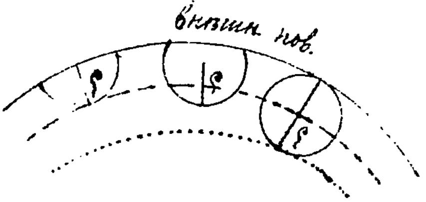
Возьмемъ систему матеріальныхъ точекъ. Раньше было выведено выраженіе виріала такой системы, который представлялся въ формѣ:

$$\sum mv^2 = \sum(xX + yY + zZ),$$

гдѣ X, Y, Z - слагающія силы на точку m по осямъ, а x, y, z - координаты точки приложенія этой силы. Мы разбивали этотъ виріалъ на виріалъ внутренній (i) и внѣшній (e); послѣдній представлялся произведеніемъ $3pv$ (форм. 17). Слѣд.,

$$\Sigma mv^2 = \Sigma_i (xX + yY + zZ) + 3pv.$$

Представимъ себѣ, что точки нашей системы безконечно близки другъ къ другу и съ равномѣрною плотностью наполняютъ объемъ v. Далѣе пусть эта система во всѣхъ направленіяхъ обладаетъ одинаковыми свойствами. Взаимодѣйствіе между точками системы, какъ это и имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности, замѣтно только, пока разстоянія между точками не превышаютъ нѣкоторой предѣльной величины, называемой радіусомъ молекулярнаго дѣйствія. Для того, чтобы судить о дѣйствій молекулярныхъ силъ на какую-нб. точку, лежащую внутри системы, описываемъ изъ нея какъ изъ центра сферу радіусомъ ρ молекулярнаго взаимодѣйствія. Если и эта сфера укладывается внутри системы, то центральная ея точка будетъ находиться подъ дѣйствіемъ молекулярныхъ силъ, попарно равныхъ другъ другу и противоположно направленныхъ. Равнодѣйствующая такихъ молекулярныхъ силъ $= 0$; слѣд., на всѣ точки, удаленныя отъ внѣшней поверхности системы на разстояніе большее или равное ρ не дѣйствуютъ никакія силы. Но мы не можемъ того-же сказать о тѣхъ точкахъ, которыя находятся ~~на~~ къ поверхности ближе радіуса молекулярнаго дѣйствія. Слѣд., намъ виріалъ остается вычислить только для безконечно-тонкаго слоя, толщина котораго $=\rho$ у поверхности системы. Очевидно, что равнодѣйствующая молекулярныхъ силъ, дѣйствующихъ на центральныя точки сферъ, отстоящія отъ внѣшней поверхности на разстояніе меньшее ρ, будетъ направлена внутрь системы. Слѣд., дѣйствіе поверхностнаго слоя выражается нѣкоторымъ поверхностнымъ (капиллярнымъ) давленіемъ на остальную часть системы. Разбиваемъ поверхностный слой на еще болѣе тонкіе слои. Каждый такой слой, притягиваясь внутрь системы силами, уменьшающимися по мѣрѣ удаленія отъ поверхности, оказываетъ давленіе, разсматриваемое какъ внѣшнее по отношенію къ внутренней части системы, имъ окруженной. Возьмемъ слой i, давленіе его есть π_i, а объемъ, окруженный слоемъ i есть v_i. Часть виріала, которая относится къ i-му слою, представится, какъ виріалъ внѣшняго давленія,—



именно черезъ $3n_i v_i$; для всего-же слоя виріалъ есть $3\sum n_i v_i$; поэтому полный виріалъ будетъ

$$\sum mv^2 = 3\sum (n_i v_i) + 3pv.$$

Если мы вмѣсто объема, ограничиваемаго слоемъ вставимъ объемъ v всей системы, то такъ какъ v больше каждаго v_i, то $\sum mv^2 < 3\sum n_i v_i + 3pv$, или

$$\sum mv^2 < 3v\sum n_i + 3pv \ldots\ldots (a)$$

Если обозначимъ черезъ v' объемъ, ограничиваемый послѣднимъ изъ нашихъ слоевъ, наиболѣе удаленнымъ отъ внѣшней поверхности, то $v' < v_i$; поэтому

$$\sum mv^2 > 3\sum n_i v' + 3pv, \text{ или } \sum mv^2 > 3v'\sum n_i + 3pv \ldots (в)$$

Мы знаемъ, что радіусъ молекулярнаго дѣйствія есть величина весьма малая; поэтому v и v' безконечно-мало разнятся между собой; поэтому вторыя части неравенствъ (а) и (в) неизмѣримо мало другъ отъ друга разнятся. Т. к. сумма $\sum mv^2$ лежитъ между ними, то мы можемъ принять её равной одному изъ нихъ. Поэтому, означая равнодѣйствующую всѣхъ ~~внѣшнихъ~~ капиллярныхъ давленій, т.е. $\sum n_i$, черезъ P, получимъ

$$\sum mv^2 = 3vP + 3pv = 3(P+p)v \ldots (142)$$

Въ случаѣ газа P ничтожно, и

$$\sum mv^2 = 3pv \ldots\ldots (142\,a)$$

Въ случаѣ жидкости p очень мало сравнительно съ P и

$$\sum mv^2 = 3Pv \ldots\ldots (142\,\beta).$$

Между частицами газа существуютъ, конечно, молекулярныя силы, и мы видѣли раньше, что $\sum mv^2$ пропорціональна абсолютной температурѣ T; поэтому, обобщая, виріалъ системы можемъ написать (опуская коэффиціентъ 3) такъ:

$$RT = (P+p)v.$$

Такое соотношеніе существовало-бы для газовъ, если-бы частицы его были въ покоѣ. Но если принять, что частицы газа находятся въ постоянномъ движеніи, то v должно быть уменьшено и равняться учетверенному объему частицъ, составляющихъ систему. Т. к. между частицами тѣлъ мы принимаемъ существованіе промежутковъ, то объемъ, занимаемый частицами, меньше объема, занимаемаго системой.

Ванъ-деръ-Ваальсъ представилъ предыдущую формулу въ такомъ видѣ:

$$RT=(N+p)(v-b).$$

Относительно N онъ дѣлаетъ предположеніе, что всѣ взаимодѣйствія частицъ пропорціональны взаимодѣйствующимъ массамъ; слѣд., N будетъ пропорціонально произведенію $m.m'$, но массы молекулъ предполагаются равными, и потому N пропорціонально m^2. Но массы, занимающія опредѣленные безконечно-малые объемы, пропорціональны плотностямъ d, которыя въ свою очередь обратно-пропорціональны удѣльнымъ объемамъ v; поэтому N можетъ быть замѣнено величиной $\frac{d}{v^2}$, и

$$\underline{RT=\left(\frac{\alpha}{v^2}+p\right)(v-b)} \quad \ldots\ldots (143)$$

Вотъ общее уравненіе состоянія Ванъ-деръ-Ваальса. Оно должно быть справедливо для газа, пара и жидкости Принятіе или непринятіе его должно быть основано на согласіи или несогласіи съ опытомъ.

Для p имѣемъ изъ (143)

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{\alpha}{v^2}$$

Это есть зависимость между p, v и T.

Если объемъ v значителенъ, то послѣдній членъ второй части отпадаетъ; также и b въ знаменателѣ ничтожно относительно v, — и формула Ванъ-деръ-Ваальса обращается въ формулу Маріотта и Гей-Люссака:

$$p=\frac{RT}{v}.$$

Для опредѣленія v имѣемъ кубическое уравн. изъ (143):

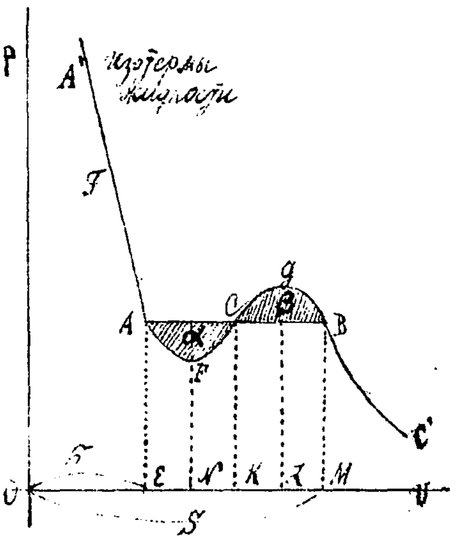
$$v^2 R T = (a + pv^2)(v - b) = av - ab + pv^3 - pbv^2$$

$$\frac{v^2 R T}{p} = \frac{av}{p} - \frac{ab}{p} + v^3 - bv^2$$

$$v^3 - v^2\left(b + \frac{RT}{p}\right) + \frac{av}{p} - \frac{ab}{p} = 0 \quad \dots (143a)$$

Для опредѣленныхъ p и T мы должны получить 3 значенія v. Если $T = Const.$, получимъ зависимость между p и v, характеризующуго процессы изотермическіе, т.е. уравненіе изотермы; для каждаго значенія p получаемъ три значенія v, три корня уравненія (143a). Эти корни или всѣ могутъ быть дѣйствительные, или одинъ дѣйствительный и два мнимыхъ сопряженныхъ, т.е. изотерма наша пересѣкается съ прямой, параллельной оси Ov, или въ трехъ точкахъ, или въ одной точкѣ. ~~Если~~

Если построимъ изотерму для жидкости, то она представляется прямой, почти параллельной оси p, ибо жидкости мало сжимаемы. Эта изотерма кончается въ точкѣ A, въ которой давленіе равно упругости насыщеннаго пара жидкости при температурѣ T изотермы; подъ этимъ давленіемъ жидкость при обычныхъ условіяхъ опыта начинаетъ кипѣть и обращается въ паръ, причемъ объемъ смѣси жидкости и пара увеличивается, пока вся жидкость не обратится въ паръ.



Пусть точка B представляетъ состояніе тѣла, когда вся жидкость обратилась въ насыщенный паръ. Давленіе въ точкѣ B тоже, что и въ A. Удѣльный объемъ $O\varepsilon = \sigma$, а удѣльный объемъ $OM = s$ - удѣльному объему пара.

Линія BC' есть изотерма перегрѣтаго пара, переходящаго постепенно въ изотерму идеальнаго газа, т.е. въ равностороннюю гиперболу. Для линіи AB имѣемъ смѣсь и жидкости и пара.

Ж. Томсонъ высказалъ предположеніе, что прямолинейная часть изотермы AB обусловливается исключительно обычными условіями опыта; но что должна существовать между точками A и B кривая, непрерывно соединяющая обѣ вѣтви изотермы A'A и BC. Такая кривая должна имѣть видъ AFCGB. Она соотвѣтствовала-бы изотермическому процессу, въ которомъ жидкость непрерывно измѣняла-бы свое состояніе на всемъ своемъ протяженіи, приближаясь къ пару. Эти соображенія находятъ себѣ подтвержденіе въ многочисленныхъ опытахъ (Кребса и Донни), указывающихъ на то, что вода, лишенная воздуха, можетъ сохранить свое жидкое состояніе при давленіяхъ меньшихъ давленія насыщеннаго пара, соотвѣтствующаго ея температурѣ. Слѣд., вѣтвь A'A опускается ниже линіи смѣси AB до нѣкоторой точки F, - это есть случай перегрѣванія жидкости.

Съ другой стороны, при давленіи нѣсколько большемъ упругости насыщеннаго пара, послѣдній сохраняетъ парообразное состояніе; поэтому выше точки B будетъ вѣтвь BG - для пара.

Теперь дѣлаемъ гипотезу, что разъ существуютъ точки F и G (опытъ показалъ), должна существовать связующая вѣтвь, но соотвѣтственныхъ ей состояній тѣла мы обнаружить не можемъ, ибо они представляютъ неустойчивыя состоянія; именно, на вѣтви FG увеличенію объема соотвѣтствуетъ и увеличеніе давленія, и обратно; такіе процессы невозможны. Поэтому если-бы тѣло находилось одно мгновеніе въ такомъ состояніи, то малѣйшее измѣненіе условій перевело-бы его или въ какую-нб другую точку вѣтви FG, а или въ точку части AF (жидкость), или въ точку части GB (паръ). Слѣд, на вѣтви FG мы имѣемъ состоянія неустойчивыя – малое уклоненіе въ сторону пара или жидкости влечетъ за собою полный переходъ въ ту-же сторону и всей массы тѣла. При допущеніи этой вѣтви мы дѣйствительно получаемъ для одного и того-же значенія p (напр. 1 атмосф.) три точки пересѣченія, т.е. три значенія объема v; но это не для всякаго p, – только отъ minimum'а $p=FN$ до maximum'а $p=GL$ возможны три значенія объема v, а за этими предѣлами имѣемъ одну точку пересѣченія изотермы линіей ||-ой Ov, – слѣд, одно значеніе объема v. Въ точкахъ F и G два корня изъ трехъ становятся равными. Этимъ и опредѣляется ихъ положеніе.

Существованіе изображенной на чертежѣ изотермы согласно, слѣд, съ формулою (143 a).

Положеніе линіи AB относительно сказанной части изотермы дается закономъ Максвелля и Клаузіуса.

Мы можемъ наше тѣло вернуть изъ A въ A замкнутымъ изотермическимъ цикломъ (сохраняя температуру неизмѣнной): сначала поведемъ по AFCGB, а потомъ по BCA. Этотъ циклъ обращаемъ, а потому для него

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Т. к. $T=Const$, то

$$\int dQ = 0.$$

По первому закону термодинамики

$$dQ = dU + p.dv.$$

Интегрируя и замѣчая, что $\int dU = U_2 - U_1$ для замкнутаго цикла $= 0$, получимъ

$$\int dQ = \int p.dv = 0,$$

т.е. сумма работъ, на одной части процесса отданныхъ = суммѣ работъ, выигранныхъ на другой части процесса. Это свойство площадей должно указать намъ положенiе линiи AB. Обозначимъ площадь $EACK$ черезъ A, а площадь $KCBM$ черезъ B; площадь $AFC = \alpha$, площадь $CYB = \beta$. Работа, выигранная на пути $AFCYB$ = работѣ, затраченной на пути BCA, или

$$A - \alpha + B + \beta = A + B, \text{ или } \alpha = \beta,$$

т.е. прямая AB, или изотерма неоднородной смѣси имѣютъ такое положенiе, что площади, ограничиваемыя ею и однородной изотермой, равны между собою. Это есть законъ Максвелля-Клаузiуса.

Можно найти теперь новое соотношенiе между упругостью насыщеннаго пара и его температурой. Напишемъ сказанное условiе между выигранной и отданной работой (по AB и $AFCYB$)

$$\int_{AB} pdv = \int_{AFCYB} pdv \quad . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Но на пути AB упругость насыщенныхъ паровъ $p = Const.$; слѣд.,

$$p\int_{AB} dv = p(s-\sigma),$$

т.к. $v_B = s$ (удѣльный объемъ пара), $v_A = \sigma$.

По формулѣ Ванъ-деръ-Ваальса

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}.$$

Вставляя во вторую часть (c), получимъ

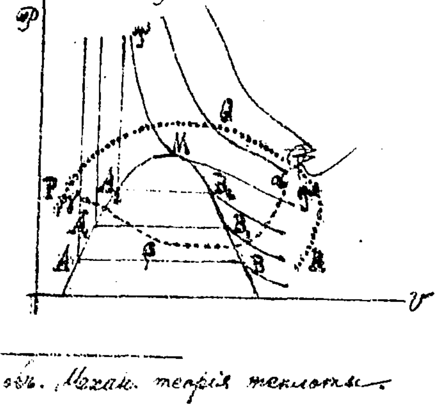
$$p(s-\sigma) = \int_\sigma^s \frac{RT}{v-b} dv - a\int_\sigma^s \frac{dv}{v^2}.$$

Интегрируя, находимъ, что

$$p(s-\sigma) = RT \lg \frac{s-b}{\sigma-b} + a\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma}\right) \quad . \; . \; . \; (144)$$

Вотъ какое соотношенiе мы имѣемъ для зависимости между упругостью и температурой насыщенныхъ паровъ.

Теперь спросимъ себя, какъ лежитъ изотерма, соотвѣтствующая температурѣ более высокой, чѣмъ Т. Т. к. температура увеличилась, то давленіе и удѣльный объемъ для А стали больше, и точка А помѣстится дальше отъ осей Op и Ov. Съ другой стороны съ повышеніемъ температуры упругости насыщенныхъ паровъ возрастаютъ, а также и ихъ плотность; послѣднее указываетъ, что удѣльный объемъ насыщеннаго пара уменьшается; вслѣдствіе этихъ двухъ причинъ точка В займетъ мѣсто выше и подвинется къ Op., т. е. прямая АВ укоротится. Возвышая Т, мы можемъ поэтому ожидать, что прямолинейная часть изотермы исчезнетъ, причемъ изотерма займетъ положеніе ТМТ'. Прямолинейная часть изотермы соотвѣтствуетъ неоднородному состоянію вещества, представляющему смѣсь жидкости и ея насыщеннаго пара; благодаря существованію этой части изотермы мы можемъ рѣзко отличать оба состоянія - жидкое и парообразное. На изотермѣ ТМТ' и высшихъ прямолинейная часть отсутствуетъ, а потому, сжимая тѣло по одной изъ этихъ изотермъ, мы не встрѣтимъ рѣзкаго перехода изъ газообразнаго въ жидкое состояніе, почему у насъ и исчезаетъ критерій для сужденія о томъ, съ какимъ состояніемъ мы имѣемъ дѣло. (~~Выше было указано~~)



Соединяя точки $A, A_1, A_2 \ldots$, мы получаемъ кривую, которая называется кривой жидкости. Соединяя точки $B, B_1, B_2 \ldots$, получаемъ другую кривую, которая называется кривой пара. Обѣ эти кривыя сходятся въ точкѣ М, черезъ которую про-

---

Умовъ. Механ. теорія теплоты.

ходитъ изотерма $T'MT'$. Кривая $AA_1A_2MB_2B_1B$ раздѣляетъ плоскость pv на двѣ части :-внутреннюю и внѣшнюю. Каждый процессъ, представляющійся кривой, лежащей только во внѣшней части, напр. PQR, даетъ непрерывный переходъ изъ жидкаго состоянія въ газообразное или обратно: въ этой области тѣло не можетъ существовать какъ неоднородная смѣсь жидкости и пара. Всякій-же процессъ, какъ напр. $\alpha\beta\gamma$, пересѣкающій внутреннюю часть будетъ соединенъ съ рѣзкимъ переходомъ изъ одного состоянія въ другое, ибо часть его лежитъ въ области прямолинейныхъ изотермъ. Температура T называется критической температурой, а точка M, въ которой кривая жидкости сходится съ кривой пара, называется критической точкой. Соотвѣтствующіе ей давленіе и объемъ называются критическими.

Выше было указано, что для всякого T изъ уравненія Ванъ-деръ-Ваальса можно найти три величины v, соотвѣтствующія изогнутой части, предугаданной Ж. Томсономъ. Для изотермы T эта изогнутая часть переходитъ въ точку M, и три корня v сливаются въ одинъ, представляющій объемъ вещества въ точкѣ M, т.е. критическій объемъ.

Назовемъ три корня уравненія (143α) — x_1, x_2, x_3. По извѣстной алгебраической теоремѣ имѣемъ

$$x_1+x_2+x_3=\frac{RT}{p}+b.$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a}{p} \qquad x_1x_2x_3=\frac{ab}{p}$$

Для точки M: $x_1=x_2=x_3=v_1$; слѣд.,

$$(\alpha) \qquad 3v_1 = b+\frac{RT'}{p_1}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\beta) & 3v_1^2=\dfrac{a}{p_1} \\ \text{~~Изъ~~}\ (\gamma) & \cancel{3}v_1^3=\dfrac{ab}{p_1}\end{array}\right\} \quad \text{Изъ } (\beta) \text{ и } (\gamma) \text{ имѣемъ } v_1=3b$$

Внося эту величину въ (β), находимъ $p_1=\frac{a}{27b^2}$.

Наконецъ (α) даетъ $\mathcal{T}_1 = \frac{8a}{27bR}$.

Если для какого-либо тѣла найдемъ a, b и R, то можемъ опредѣлить $\mathcal{T}_1, p_1, v_1$. Такъ для CO_2, принимая за единицу давленія 1 атмосферу, а за единицу объема — удѣльный объемъ при 0°C подъ давленіемъ 1 atm., имѣемъ

$$R = \frac{1,00676}{273}, \quad a = 0,00874, \quad b = 0,0023$$

Вычисляя, получимъ: $\mathcal{T}_1 = 273 + 32,5$, $p_1 = 61^{atm}$, $v = 0,0069$.

Слѣд., критическая температура для CO_2 есть 32°,5 C.

Андрьюсъ наблюдалъ 30°,92 C.

Положимъ теперь

$$p = \varepsilon \cdot p_1, \quad v = nv_1, \quad \mathcal{T} = m \cdot \mathcal{T}_1$$

и внесемъ въ формулу Ваальса (143); получимъ

$$\left(\varepsilon p_1 + \frac{a}{n^2 v^2}\right) \cdot (n v_1 - b) = R m \mathcal{T}_1$$

Вмѣсто $p_1, v_1, \mathcal{T}_1$ подставимъ только-что найденныя величины:

$$\left(\varepsilon \cdot \frac{a}{27b^2} + \frac{a}{9n^2b^2}\right)(3nb - b) = \frac{8maR}{27bR}$$

или по сокращеніи

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{n^2}\right)(3n - 1) = 8m \quad \dots \quad (145)$$

Изъ уравненія изотермы исчезли всѣ специфическія свойства тѣла; слѣд., выражая давленіе, объемъ и температуру вещества въ доляхъ его критическаго объема, давленія и температуры и принимая эти доли за характеристики состоянія тѣла, уравненіе изотермы, или ея законъ будетъ одинаковъ для всѣхъ тѣлъ природы; эта изотерма называется *приведенной изотермой*.

Если мы въ соотношеніе (144) для упругости и температуры насыщенныхъ паровъ внесемъ

$$s = n_3 v_1, \quad \sigma = n_1 v_1, \quad p = \varepsilon p_1,$$

то найдемъ по сокращеніи тоже нѣкоторое приведенное уравненіе, — именно

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{n_1 n_3}\right)(n_3 - n_1) = \frac{8}{3} m \lg \frac{3n_3 - 1}{3n_1 - 1}$$

Т. к. координаты точекъ A и B изотермы удовлетворавенство ур.(145), то подставляя въ него соотвѣтственныя величины, дадимъ ему видъ:

для B $$\left(\varepsilon+\frac{3}{n_3^2}\right)\left(3n_3-1\right)=8m$$
для A $$\left(\varepsilon+\frac{3}{n_1^2}\right)\left(3n_1-1\right)=8m \quad \ldots (147)$$

Изъ ур.(146) и (147) можно найти исключеніемъ n_1, n_3, или n_1, ε, или n_3, ε:

$$\varepsilon=f(m), \quad n_3=\varphi(m), \quad n_1=\psi(m)$$

Отсюда слѣдуетъ, что если для ряда жидкостей абсолютныя температуры составляютъ одинаковую долю (m) соотвѣтственныхъ критическихъ температуръ, то упругости насыщенныхъ паровъ, удѣльные объемы пара и жидкости будутъ представляться одинаковыми долями соотвѣтственныхъ критическихъ давленій и объемовъ. Отсюда мы почерпаемъ представленіе о соотвѣтственныхъ состояніяхъ тѣлъ. Сходныя свойства различныхъ тѣлъ природы могутъ быть сравниваемы при различныхъ условіяхъ. Въ зависимости отъ характера этихъ условій результаты сравненія могутъ быть болѣе или менѣе сложны. Тѣ состоянія тѣлъ, при которыхъ результаты подобнаго сравненія сводятся къ простѣйшимъ законамъ, называются соотвѣтственными состояніями тѣлъ. Мы видимъ изъ предыдущаго, что такими соотвѣтственными состояніями представляются тѣ, въ которыхъ абсолютныя температуры тѣлъ представляются одинаковыми долями ихъ критическихъ температуръ

Если мы примемъ $p_1=1$, $v_1=1$, $T_1=1$, то соотвѣтственныя температуры будутъ представляться числомъ m. Для одного и того-же m для всѣхъ тѣлъ величины ε, n_1, n_3 будутъ одинаковы. Слѣд., въ такихъ координатахъ пограничная кривая $AA_1A_2MB_2B_2B_1$ для всѣхъ тѣлъ будетъ имѣть одинаковый видъ.

Укажемъ наконецъ ур. состоянія, угаданное Клаузіусомъ:

$$p = \frac{RT}{v-\alpha} - \frac{C}{T(v+\beta)^2} \quad \dots \quad (148)$$

гдѣ α и β малыя величины.

Полагая ихъ равными нулю и рѣшая уравненіе относительно v, имѣемъ

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{C}{Tvp}$$

или, т.к. $pv = RT$

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{C}{RT^2}, \quad \dots \quad (149)$$

т.е. формулу Thomson-Joule.

§54. До сихъ поръ мы разсматривали ур. состоянія въ формѣ $f(p,v,t)=0$. Оно не опредѣляетъ ни S, ни U. Теперь мы попробуемъ составить ур., дающее сразу всѣ величины, характеризующія состоянія тѣла, всѣ части котораго будемъ сначала предполагать въ одинаковой фазѣ.

Примемъ за основныя характеристики v и S. Тогда

$$U = f(S,v)$$

и кромѣ того для обращаемыхъ процессовъ

$$dQ = dU + p.dv, \quad dQ = TdS.$$

Слѣд., $dU = TdS - pdv$

Съ другой стороны $dU = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$

Слѣд.

$$\left(\frac{df}{dS}\right)_v = T, \quad \left(\frac{df}{dv}\right)_S = -p.$$

Так. обр., зная f, будемъ знать p и T.

$U = f(S,T)$ есть ур. нѣкоторой поверхности, называемой термодинамической (она введена Gibbs'омъ). Эта поверхность отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ u, S, v.

Если какая-нб. поверхность дана ур. $f(x,y,z)=0$, то ур. касательной плоскости въ точкѣ x', y', z' напишется:

$$(x-x')\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + (y-y')\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (z-z')\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Величины, стоящія въ скобкахъ, должны быть отнесены къ точкѣ касанія.

Слѣд., плоскость, прикасающаяся къ термодинамической поверхности въ точкѣ U, S, v, будетъ

$$U - U_1 - (S - S_1)\frac{\partial f}{\partial S} - (v - v_1)\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \text{ или}$$

$$U - U_1 - (S - S_1)T_1 + (v - v_1)p_1 = 0, \text{ или}$$

$$U - ST_1 + p_1 v = U_1 - ST_1 + v_1 p_1$$

Здѣсь U_1, T_1, p_1, v_1, S_1 относятся къ точкѣ касанія.

Дифференціальное ур. этой плоскости есть

$$dU - T_1 dS + p_1 dv = 0,$$

т.е. 1^е уравненіе термодинамики.

Эта плоскость встрѣчаетъ плоскости координатъ US и Uv по двумъ прямымъ; tg. угла первой прямой съ осью OS есть, очевидно,

$$tg\alpha = \frac{\partial U}{\partial S} = T_1;$$

tg. угла второй прямой съ осью Ov есть

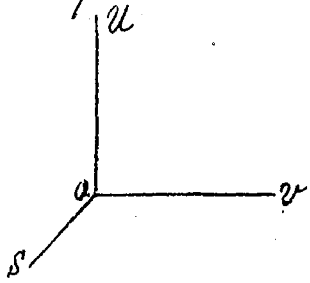
$$tg\beta = \frac{\partial U}{\partial v} = -p.$$

Так. обр., проведя въ какой-нб. точкѣ термодинамической поверхности касательную плоскость, мы вполнѣ опредѣляемъ двѣ указанныя прямыя, а слѣд., T_1 и p_1, соотвѣтствующія состоянію тѣла, представляемому взятой точкой поверхности.

Считая постоянною одну изъ координатъ v, S или U, т.е. пересѣкая поверхность $U = f(S, v)$ соотвѣтственной плоскостью, мы получимъ систему изотермъ, изэнтропъ или изодинамъ.

Наконецъ, перемѣщая касательную плоскость такъ, чтобы оставался неизмѣннымъ или $\angle\alpha$, или $\angle\beta$, найдемъ мѣсто точекъ прикосновенія, принадлежащихъ изотермѣ или изопіёстѣ.

Повернемъ систему прямоугольныхъ координатъ и съ нею термодинамическую поверхность такъ, чтобы плоскость $(U, -v)$ проходила черезъ солнце; солнечные лучи будутъ параллельны этой плоскости, и линія, отдѣляющая свѣтъ отъ тѣни на термодинамической поверхности, будетъ линіей равныхъ давленій или изопіестой. Вращая



поверхность около оси OS, мы вычертимъ так. обр. всѣ изопіестическія линіи. Направляя къ солнцу плоскость US такъ, чтобы ей были параллельны солнечные лучи, линія, отдѣляющая свѣтъ отъ тѣни, будетъ изотермой. Вращая около оси Ov, мы вычертимъ на поверхности различныя изотермы. Мы разсматривали случай, когда тѣло на всемъ своемъ протяженіи было однородно, т.е. всѣ его части находились въ одинаковой фазѣ. Наши соображенія примѣнимы, слѣд., къ случаямъ, когда тѣло *на всемъ своемъ протяженіи* находится или въ твердомъ, или въ жидкомъ, или въ газообразномъ состояніи. Каждому состоянію въ одной изъ этихъ фазъ на термодинамической поверхности будетъ соотвѣтствовать точка. Слѣд., одна часть термодинамической поверхности будетъ соотвѣтствовать твердому, другая - жидкому, третья - газообразному состоянію. Такая термодинамическая поверхность будетъ называться *первоначальной.*

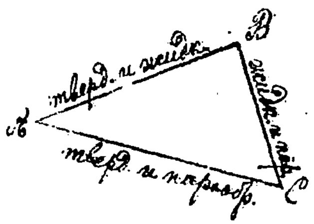
Разсмотримъ теперь случай, когда единица массы тѣла неоднородна, т.е. ея части находятся въ различныхъ фазахъ - жидкомъ и твердомъ, жидкомъ и парообразномъ, твердомъ и парообразномъ, или-же во всѣхъ трехъ - твердомъ, жидкомъ и парообразномъ. Какими точками будутъ представляться подобныя неоднородныя состоянія въ нашемъ пространствѣ (u, v, s)? Мы будемъ разсматривать только такія неоднородныя состоянія, всѣ части которыхъ находятся во взаимномъ равновѣсіи, т.е. массы, находящіяся въ разныхъ фазахъ не измѣняются по своей величинѣ, не превращаются другъ въ друга. Необходимымъ условіемъ такого равновѣсія является одинаковость p и T на протяженіи всего тѣла, во всѣхъ его частяхъ. Объемъ тѣла равенъ суммѣ объемовъ его частей, энтропія тѣла = суммѣ энтропій частей, энергія тѣла = суммѣ энергій частей.

Пусть единица массы нашего тѣла распредѣлена такъ, что масса x находится въ твердомъ состояніи, y въ жидкомъ и z – въ газообразномъ. Очевидно, $x+y+z=1$. Затѣмъ для всѣхъ этихъ частей существуетъ одно и тоже p и T. Отыщемъ на первоначальной термодинамической поверхности для нашихъ p и T въ ея части, соотвѣтствующей твердому состоянію точку A,

——— жидкому ——— B,

——— парообразному ——— C.

Касательныя плоскости, проведенныя въ этихъ точкахъ, вполнѣ опредѣляются величинами p и T и, по вышеизложенному, должны быть другъ другу параллельны. Соединивъ точки A, B, C прямыми линіями, получимъ



$\triangle ABC$. Въ вершинахъ этого треугольника представимъ себѣ массы x, y, z и отыщемъ координаты v, S, U центра тяжести этихъ массъ.

v_A, v_B, v_C суть удѣльные объемы ⎫ въ состояніяхъ A, B, C, т.е.
S_A, S_B, S_C —— энтропіи ⎬ въ тоже время координаты
U_A, U_B, U_C —— энергіи ⎭ точекъ A, B, C.

Помня, что $x+y+z=1$, находимъ по извѣстному правилу:

$$v = \frac{x v_A + y v_B + z v_C}{x+y+z} = x \cdot v_A + y \cdot v_B + z v_C .$$

$$S = \frac{x S_A + y S_B + z S_C}{x+y+z} = x S_A + y S_A + z S_C$$

$$U = \frac{x U_A + y U_B + z U_C}{x+y+z} = x U_A + y U_B + z U_C$$

Ибо v, s, U, какъ показываетъ ихъ составъ, представляютъ объемъ, энтропію энергію нашего тѣла неоднороднаго, часть коего x находится въ состояніи A, часть y въ состояніи B и т.д. Слѣд. центръ тяжести массъ x, y, z, помѣщенныхъ въ вершинахъ нашего треугольника и есть та точка которая представляетъ собою неоднородное состояніе нашего тѣла. Эта точка лежитъ, какъ извѣстно, въ плоскости $\triangle ABC$. Мѣняя величины x, y, z мы будемъ получать неоднородныя состоянія, которыя характеризуются различными точками площади $\triangle ABC$. Слѣд, эта площадь представляетъ собою термическую поверхность для неоднороднаго тѣла, состоящаго изъ трехъ фазъ. Мы её построили съ помощью трехъ точекъ A, B, C, взятыхъ на *первоначальной* поверхности; поэтому новая наша поверхность называется *производною* поверхностью.
Центръ тяжести упадетъ на сторонѣ AB при $z=0$, на сторонѣ BC при $x=0$, на сторонѣ AC при $y=0$. Поэтому точки прямой AB соотвѣтствуютъ тѣлу, состоящему изъ 2хъ фазъ въ равновѣсіи: твердой и жидкой; BC – жидкой и парообразной; AC – твердой и парообразной.
Касательная плоскость къ производной термодинамической поверхности, т.е. къ площади ABC есть эта самая плоскость. Ибо и для неоднороднаго состоянія справедливо уравненіе

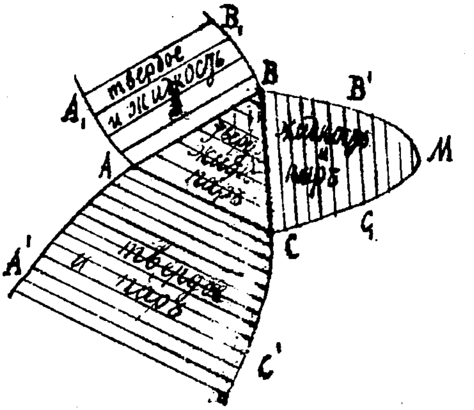
$$dU = Tds - p.dv.$$

Слѣд, таково дифференціальное ур. касательной плоскости и въ нашемъ случаѣ, т.е. это есть дифференціальное ур. плоскости ABC. Наклонъ этой плоскости къ осямъ OS и Ov будетъ опредѣляться величинами

$$\frac{dU}{dS} = T \quad \text{и} \quad \frac{dU}{dv} = -p,$$

т.е. тѣми-же, какъ и наклонъ касательныхъ плоскостей проведенныхъ къ *первоначальной* поверхности въ точкахъ A, B, C. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ эти касательныя плоскости совпадаютъ другъ съ другомъ и съ плоскостью ABC. Итакъ *производная* термодинамическая поверхность представляется частью плоскости, касающейся первоначальной поверхности въ трехъ точкахъ, лежащихъ въ мѣстахъ, соотвѣтствующихъ тремъ различнымъ фазамъ. Мы не будемъ здѣсь касаться о томъ, сколько такихъ общихъ касательныхъ плоскостей можно вообще провести. Замѣтимъ только, что, очевидно, подобныя плоскости не могутъ существовать для всякихъ произвольно взятыхъ p и T, опредѣляющихъ, какъ мы видѣли, ихъ направленіе. Точки A, B, C суть точки первоначальной термодинамической поверхности, допускающія общую касательную плоскость, чѣмъ и опредѣляется ея направленіе, т.е. p и T, при которыхъ три фазы тѣла, взятыя въ произвольныхъ количествахъ, могутъ находится во взаимномъ равновѣсіи, т.е. при которыхъ тѣло можетъ одинаково существовать во всѣхъ трехъ состояніяхъ.

Представимъ себѣ теперь неограниченную плоскость, проходящую черезъ A, B, C. Будемъ вращать её около стороны AB. Она коснется двухъ другихъ точекъ A_1 и B_1; повернемъ её далѣе около прямой A_1B_1 — она коснется A_2 и B_2 и т. д. Такимъ обр. наша плоскость, катясь *по первоначальной* термодинамической поверхности, оставитъ на ней два криволинейныхъ слѣда AA_1 и BB_1. Эти слѣды будутъ соединены поверхностью линейчатою, составленную изъ прямыхъ AB, A_1B_1, A_2B_2 и т. д.



Эта поверхность будетъ представлять собою состоянія неоднороднаго тѣла, содержащаго двѣ фазы въ равновѣсіи (твердую и жидкую) для различныхъ p и T и въ различныхъ количествахъ. Вращая плоскость ABK около сторонъ BC и AC, мы получимъ полное представленіе о производной термодинамической поверхности: именно, она состоитъ изъ Δ-ка (равнов. 3хъ фазъ при опредѣленныхъ p и T) и 3 лопастей (заштрихованныхъ, равновѣсіе 2хъ фазъ при различныхъ p и T). Лопасть, соотвѣтствующая жидкой и парообразной фазѣ, ограничена, ибо кривая жидкости BB'M сходится съ кривой пара CC₁M въ критической точкѣ M. Незаштрихованныя части представляютъ собою покрытыя производною поверхностью части первоначальной поверхности.

(Подробнѣе см. Gibbs: Thermodynamische Studien въ переводѣ на нѣмецкій яз. Ostwald'a).

§55. Займемся еще изысканіемъ уравненій состоянія въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

Прежде всего остановимся на явленіяхъ диссоціаціи:

При нагрѣваніи нѣкоторыхъ сложныхъ тѣлъ послѣднія распадаются на простѣйшія, причемъ при данной температурѣ распаденіе останавливается при наступленіи нѣкоторыхъ особыхъ условій. Такъ напр., при нагрѣваніи углекислой извести ($CaCO_3$), представляющей твердое тѣло, послѣдняя распадается на твердое тѣло — окись кальція (CaO) и газъ — угольную кислоту (CO_2).

Выдѣленіе угольной кислоты изъ углекислой извести останавливается, когда ея упругость достигаетъ предѣльнаго значенія, находящагося въ зависимости только отъ температуры. По опытамъ Le Chatelier предѣльная упругость (напряженіе диссоціаціи), выраженная въ ртутныхъ ~~mm~~ миллиметрахъ для различныхъ температурѣ t представляется слѣдующими цифрами:

t	mm.	t	mm.
547	27	810	678
625	56	812	753
740	255	865	1333

Какимъ образомъ отыскать по крайней мѣрѣ форму зависимости между предѣльною упругостью газа p и его температурою? Эта зависимость и представитъ уравненіе состоянія для даннаго явленія. Мы её найдемъ, приводя аналогію между выдѣленіемъ CO_2 изъ твердаго тѣла и испареніемъ.

Положимъ, что углекислая известь (масса $= 1$) находилась первоначально при температурѣ T_0. Помѣщаемъ её мысленно въ сосудъ, какъ разъ имѣющій такой-же внутренній объемъ, и нагрѣваемъ до температуры T. CO_2 при этомъ не можетъ выдѣлятся, такъ какъ сосудъ весь наполненъ твердымъ тѣломъ. Внутренняя энергія получитъ приростъ

$$\Delta U = C(T - T_0),$$

гдѣ C есть теплоемкость углекислой извести.

Затѣмъ увеличиваемъ объемъ пока изъ углекислой извести не выдѣлится весь газъ CO_2, имѣя въ то-же время предѣльную упругость p. Масса газа пусть будетъ m. Сравнительно съ объемомъ v газа пренебрегаемъ объемомъ твердаго остатка CaO. Пусть r есть скрытая теплота диссоціаціи, потребляемая, какъ и въ случаѣ испаренія, на выдѣленіе газа и совершеніе внѣшней работы. Какъ и прежде измѣненіе энергіи въ тепловыхъ единицахъ будетъ

$$\Delta_1 U = rm - \frac{pv}{E}.$$

Все измѣненіе энергіи будетъ, слѣд., $\Delta U + \Delta_1 U$, а полная энергія системы есть

$$Const. + c_1(T - T_0) + rm - \frac{pv}{E}.$$

Съ другой стороны, наша система состоитъ изъ твердой окиси кальція (масса $1-m$), теплоемкость C') и угольной кислоты (масса m, теплоемкость при постоянномъ объемѣ c_v); поэтому энергія той-же системы можетъ быть написана такъ:

$$Const + c'T(1-m) + mc_v T.$$

Оба выраженія должны быть тождественны, а потому части, зависящія отъ температуры T, могутъ отличаться только на нѣкоторую постоянную величину. Поэтому

$$rm + \frac{pv}{E} + \left[C - C'(1-m) - mc_v\right] T = Const.$$

Называя черезъ s - удѣльный объемъ газообразной CO_2, а черезъ σ - уд. объемъ ея, когда она представляла составную часть твердой углекислой извести, имѣемъ

$$r = \frac{T}{E}(s-\sigma)\frac{dp}{dT}, \quad v = ms.$$

Пренебрегая величиною σ сравнительно съ s, мы получимъ ур., какъ и при разсмотрѣніи паровъ, называя черезъ a и b постоянныя:

$$\left(T\frac{dp}{dT} - p\right)\frac{s}{E} + aT + b = 0.$$

Замѣняя $sp = RT$ и интегрируя, получимъ, какъ и тамъ, формулу Дюпре:

$$lg\, p + a'\, lg\, T + \frac{b'}{T} + C' = 0$$

для выраженія связи между p и T.

Эта формула согласуется съ опытомъ.

§56. Мы разсматривали системы, которыя состояли изъ химически однороднаго тѣла въ различныхъ физическихъ состояніяхъ. Представимъ себѣ теперь систему, состоящую изъ химически различныхъ тѣлъ. Въ ней возможны разнообразные процессы. Такъ напр., газъ можетъ быть поглощаемъ жидкостью, твердое тѣло-растворяться, могутъ происходить химическія измѣненія въ составѣ различныхъ частей - соединенія и разложенія. Большинство такого рода процессовъ влечетъ за собою измѣненіе температуры системы: температура или повышается, или понижается. Поэтому, для сохраненія температуры неизмѣнной или чтобы придать процессу характеръ изотермическій — въ первомъ случаѣ намъ нужно будетъ отнимать тепло, во второмъ — приводить тепло. О первыхъ процессахъ мы говоримъ вслѣдствіе этого какъ о такихъ, при которыхъ тепло выдѣляется — процессы экзотермическіе; во вторыхъ тепло поглощается — процессы эндотермическіе.

Измѣненіе энергіи зависитъ только отъ начальнаго и конечнаго состоянія системы. Поэтому каковы-бы ни были процессы, каковъ-бы ни былъ рядъ послѣдовательныхъ химическихъ реакцій, измѣненіе энергіи будетъ одно и то-же, если начальныя и конечныя состоянія системы одинаковы въ различныхъ случаяхъ.

Предположимъ, что реакціи происходятъ подъ постояннымъ атмосфернымъ давленіемъ p и соединены съ выдѣленіемъ тепла; это послѣднее мы представимъ поэтому черезъ $-Q'$, гдѣ Q будетъ уже положительно. Начальный и конечный объемы системы пусть будутъ v_1 и v_2.

По первому закону термодинамики:

$$-Q = U_2 - U_1 + \frac{p}{2}(v_2 - v_1),$$

гдѣ Q и U выражены въ калоріяхъ. Отсюда

$$U_1 - U_2 = Q + \frac{p}{2}(v_2 - v_1).$$

Мы видимъ, что измѣненіе внутренней энергіи системы будетъ измѣряться количествомъ выдѣленнаго тепла въ томъ случаѣ, когда членъ, представляющій внѣшнюю работу, будетъ равенъ нулю. Это имѣетъ мѣсто 1) если процессъ не сопровождается измѣненіемъ объема системы и 2) если всѣ тѣла системы тверды или жидки, то измѣненія объема системы большею частью такъ малы, что внѣшней работой можно пренебречь. Въ этихъ случаяхъ выдѣляющееся тепло, измѣряемое калориметрически служитъ мѣрою измѣненія энергіи системы:

$$U_1 - U_2 = Q.$$

Измѣреніе теплоты, развивающейся или поглощаемой въ различныхъ химическихъ реакціяхъ составляетъ предметъ термохиміи.

Въ случаѣ газовъ внѣшняя работа вычисляется такъ. Мы знаемъ, что для килограммолекулы всякаго газа законъ Маріотта и Ге-Люссака пишется такъ:

$$pv = 2ET.$$

Положимъ, что до реакціи въ системѣ было N_1 молекулъ, послѣ-же реакціи число молекулъ увеличилось на n; тогда

$$pv_1 = 2ETN_1 \quad , pv_2 = 2ET(N_1+n),$$

откуда

$$p(v_2 - v_1) = 2EnT$$

и

$$U_1 - U_2 = Q + 2nT.$$

Объемы выражаются здѣсь въ кубическихъ метрахъ. Напр., 1 молекула водорода, соединяясь съ $\frac{1}{2}$ молекулы кислорода при 0° даетъ жидкую воду. При этомъ изъ газообразнаго состоянія исчезли 1½ молекулы, и

$$n = -\frac{3}{2}$$

Т. к. здѣсь $T = 273$, то работа, принятая системой и совершенная давленіемъ атмосферы при конденсаціи газовъ въ жидкость, есть

$$2nT = -819 \text{ килограмкалорій}.$$

Если будемъ брать не килограммолекулу, а граммолекулу, то работа будетъ въ 1000 разъ меньше, ибо во столько-же разъ будетъ меньше первоначальный объемъ нашей системы; работа будетъ − 0,819 килограмкалорій = − 819 грамкалорій. Въ термохиміи принимаютъ въ настоящее время за единицу тепла — количество, потребное для нагрѣванія 1 gr. воды отъ 0° до 100° — и эту единицу означаютъ буквою K; K = 100 среднихъ грамкалорій; слѣд., работа внѣшняго давленія = −8,19 K.

Мы можемъ опредѣлить вліяніе температуры на теплоту реакціи Q. Мы можемъ представить её въ видѣ:

$$Q=\left(U_1+\frac{pv_1}{E}\right)-\left(U_2+\frac{pv_2}{E}\right)$$

Если одна и та-же реакція происходитъ одинъ разъ при температурѣ T, а другой разъ при температурѣ T' < T, то

$$Q_T=\left(U_1+\frac{pv_1}{E}\right)_T-\left(U_2+\frac{pv_2}{E}\right)_T$$

$$Q_{T'}=\left(U_1+\frac{pv_1}{E}\right)_{T'}-\left(U_2+\frac{pv_2}{E}\right)_{T'}$$

$$Q_T-Q_{T'}=\left[\left(U_1+\frac{pv_1}{E}\right)_T-\left(U+\frac{pv_1}{E}\right)_{T'}\right]-\left[\left(U_2+\frac{pv_2}{E}\right)_T-\left(U_2+\frac{pv_2}{E}\right)_{T'}\right]$$

Но первая скобка есть тепло q_1, которое нужно затратить, чтобы нагрѣть систему до реакціи съ T' до T.(**) Слѣд,

$$Q_T-Q_{T'}=q_1-q_2$$

Если система состоитъ изъ двухъ тѣлъ (съ массами m_1 и m_2 и теплоемкостями при постоянномъ давленіи c_1 и c_2), вступающихъ въ новое химическое соединеніе, теплоемкость коего есть **c**, то

$$q_1=(m_1c_1+m_2c_2)(T-T'), \quad q_2=(m_1+m_2)c(T-T').$$

Слѣд,

$$Q_T-Q_{T'}=(m_1c_1+m_2c_2)(T-T')-(m_1+m_2)c(T-T')$$

и

$$\frac{dQ}{dT}=(m_1c_1+m_2c_2)-(m_1+m_2)c.$$

Эта величина вообще отлична отъ нуля.

§57. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно составить себѣ дальнѣйшее представленіе о теплотѣ реакціи Q, если процессъ превращенія веществъ обращаемъ. Подобный случай мы находимъ въ раствореніи воды въ кислотахъ и солей въ водѣ.

Надъ воднымъ растворомъ сѣрной кислоты образуются *чистые* водяные пары, коихъ упругость меньше упруго-

---

(*) Пропущено: и вторая тепло q_2, чтобы нагрѣть систему послѣ реакціи съ T' до T.

сти паровъ надъ чистою водою при той-же температурѣ: говорятъ поэтому, что сѣрная кислота притягиваетъ къ себѣ воду. Приливаніемъ воды къ сѣрной кислотѣ вызывается реакція, сопровождаемая выдѣленіемъ тепла. Такую реакцію мы можемъ сдѣлать обращаемою, совершая нижеописанный процессъ.

Представимъ себѣ цилиндръ, въ нижней части котораго налитъ водный растворъ сѣрной кислоты. Надъ растворомъ находится водяной паръ и сверху объемъ системы ограниченъ поршнемъ.

Опуская или поднимая поршень, мы можемъ вдавливать или вытягивать водяной паръ изъ раствора и такимъ образомъ вводить въ него или извлекать различныя количества воды. Такой процессъ смѣшенія воды съ сѣрной кислотой будетъ обращаемымъ.

Подробнѣе такой процессъ можетъ быть произведенъ такъ. Пусть между воднымъ растворомъ сѣрной кислоты и H_2O находится непроницаемая перегородка а, передающая раствору давленіе изъ верхняго пространства, но уничтожающая прикосновеніе между H_2O и растворомъ. H_2O пусть находится въ жидкомъ состояніи, и надъ поршнемъ, допустимъ, тяготѣетъ давленіе атмосферы, причемъ температура воды есть $T_0 < 100°C$ и соотвѣтственная упругость насыщеннаго пара $p_0 <$ давленія атмосферы.

Производимъ слѣдующія операціи:

1) Понижаемъ внѣшнее давленіе съ атмосферы до p_0.

2) Отодвигаемъ поршень до тѣхъ поръ, пока при температурѣ T_0 вся вода не обратится въ насыщенный паръ упругости p_0.

3) Продолжаемъ двигать поршень, увеличивая объемъ,

до тѣхъ поръ пока при той-же температурѣ упругость пара не понизится съ p_0 до упругости пара p_1, соотвѣтствующей составу раствора при ϑ_0.

4.) Убираемъ перегородку a.

5) Понижаемъ поршень до тѣхъ поръ, пока весь водяной паръ не будетъ втиснутъ въ водный растворъ сѣрной кислоты.

6.) Увеличиваемъ давленіе на поршень до давленія атмосферы. Этотъ процессъ обращаемъ. Подсчитывая его, Кирхгоффъ нашелъ выраженіе для теплоты растворенія воды въ данномъ растворѣ сѣрной кислоты.

Для той-же цѣли мы воспользуемся свойствомъ внутренней энергіи, — именно, что ея измѣненіе зависитъ только отъ начальнаго и конечнаго состоянія системы.

Представимъ себѣ въ двухъ сосудахъ — въ одномъ — водный растворъ сѣрной кислоты, въ другомъ — массу dm чистой воды. Это есть начальное состояніе первой нашей системы. Обращаемъ при температурѣ ϑ_0 массу dm въ насыщенный паръ. Это есть конечное состояніе второй нашей системы (водный растворъ кислоты и насыщенный паръ чистой воды). Измѣненіе энергіи будетъ при этомъ, какъ не разъ было указано:

$$\Delta U = \left(r - \frac{p(s-\sigma)}{E}\right) dm.$$

Тоже конечное состояніе II можетъ быть получено изъ I еще другимъ путемъ, а именно:

1) Смѣшиваемъ массу воды dm съ воднымъ растворомъ; при этомъ развивается количество тепла $-Q\,dm$, которое мы уводимъ, чтобы сохранить температуру системы неизмѣнной. Т. к. при этомъ измѣненіе объема жидкости есть безконечно-малая величина высшаго порядка, какъ объ этомъ говорилось и прежде, то пренебрегаемъ внѣшней работой. Слѣд, измѣненіе энергіи по 1ому закону термодинамики, имѣющему мѣсто и для необращаемыхъ

процессовъ будетъ:

$$-Q\,dm = \Delta U'.$$

2) Выпариваемъ это самое количество воды dm, увеличивая пространство надъ растворомъ. Называя черезъ r_1 скрытую теплоту испаренія въ этомъ случаѣ, черезъ p_1 и s_1 упругость пара и его удѣльный объемъ въ случаѣ даннаго раствора при температурѣ T_0, измѣненіе энергіи будетъ:

$$\Delta U'' = \left[r_1 - \frac{p_1(s_1-\sigma)}{E}\right] dm.$$

3) Помѣщаемъ между растворомъ и паромъ непроницаемую перегородку, и, сохраняя его температуру T_0, сжимаемъ его до упругости p_0. При этомъ допуская, что паръ слѣдуетъ законамъ идеальнаго газа мы не измѣняемъ его внутренней энергіи, т. к. газъ испытываетъ изотермическій процессъ. Мы знаемъ, именно, что приростъ внутренней энергіи газа выражается черезъ $dU = c_v \cdot dT$, и если $dT=0$, то $dU=0$.

Итакъ въ концѣ нашихъ операцій мы получили въ раздѣльности прежній водный растворъ кислоты и насыщенный паръ (колич. $= dm$) чистой воды, т.е. конечное состояніе II. Мы должны, слѣд., имѣть

$$\Delta U = \Delta U' + \Delta U'',$$

т.к. начальное и конечное состояніе системы въ обѣихъ случаяхъ одинаково.

Слѣд., подставляя и сокращая на dm:

$$r - \frac{p(s-\sigma)}{E} = -Q + r_1 - \frac{p_1(s-\sigma)}{E}$$

Пренебрегая σ передъ s, и разсматривая паръ, какъ идеальный газъ, имѣемъ по закону Маріотта:

$$ps = p_1 s_1.$$

Сокращая, находимъ

$$Q = r_1 - r.$$

Но

$$r = \frac{T_0}{E}(s-\varphi)\frac{dp_0}{dT_0} = \frac{RT^2}{Ep_0}\cdot\frac{dp_0}{dT}$$

$$r_1 = \frac{T}{E}(s-\varphi)\frac{dp_1}{dT} = \frac{RT^2}{E\cdot p_1}\cdot\frac{dp_1}{dT}.$$

Преобразованія произведены заменой $v = \frac{RT}{p_0}$, $v_1 = \frac{RT}{p_1}$.
Слѣд.

$$Q = \frac{RT^2}{E}\cdot\frac{d}{dT}\lg\frac{p_1}{p_0}\ -$$

Это есть формула для теплоты растворенія, данная Кирхгоффомъ и указывающая зависимость ея отъ упругости пара раствора и растворителя.

Термохимическія изслѣдованія Томсена устанавливаютъ зависимость количества тепла q, развиваемаго отъ прибавленія къ данному водному раствору кислоты количества воды m, т.е. $q = f(m)$. Мы имѣемъ

$$Q\cdot dm = \frac{dq}{dm}\,dm$$

или

$$Q = \frac{dq}{dm}.$$

Формула Кирхгоффа достаточно согласуется съ опытомъ.

XI. Термодинамическіе потенціалы
и свободная энергія.

§58. Мы уже имѣли случай указать на рядъ функцій, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что величина ихъ уменьшается процессами самопроизвольными, т.е. такими, которые совершаются безъ сообщенія энергіи извнѣ тѣмъ тѣламъ, въ которыхъ процессъ совершается.
Если начальное состояніе системы характеризуется функціей F_0, а послѣдующее функціей F_1, то для самопроизвольнаго процесса будетъ: $F_1 - F_0 \leqq 0$, или, сравнивая два безконечно-близкихъ состоянія системы, послѣдующее связано съ предыдущимъ тѣмъ, что $dF < 0$.
Процессъ остановится самъ собою, когда F перестанетъ убывать, т.е. когда эта функція будетъ minimum, другими словами при $dF = 0$. Когда самопроизвольный процессъ остановится, то мы получимъ случай равновѣсія системы, т.е. такого ея состоянія, при которомъ въ ней никакихъ измѣненій происходить не можетъ.
Процессы самопроизвольные суть процессы необратимые.

Мы знаемъ, что условіе обращаемости процесса состоитъ въ томъ, что каждое изъ тѣхъ состояній, послѣдовательностью которыхъ онъ представляется, есть состояніе равновѣсія, т.е. процессъ можетъ быть остановленъ въ любой его фазѣ и система останется въ равновѣсіи при тѣхъ условіяхъ, въ которыхъ произведена остановка. Поэтому тѣ состоянія равновѣсія, которыми заканчиваются самопроизвольные процессы, могутъ представлять въ своей совокупности послѣдовательные моменты нѣкоторыхъ обращаемыхъ процессовъ. Мы приведемъ даже примѣры подобной связи.

§59. Возьмемъ написанное въ общемъ видѣ 1ое уравненіе термодинамики: $dU = dQ - p.dv$. Это уравненіе, какъ знаемъ, справедливо для всякихъ процессовъ. Будемъ полагать, что вся система находится подъ однимъ и тѣмъ-же давленіемъ.

Возьмемъ еще 2ое уравненіе термодинамики: $dQ = T.dS$; оно справедливо, какъ знаемъ, уже только для обращаемыхъ процессовъ.

Если подставимъ второе изъ написанныхъ ур. въ первое, то получимъ соотношеніе:

$$dU = TdS - pdv, \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

которое относиться будетъ къ однимъ обращаемымъ процессамъ. Послѣднее ур. можно переписать такъ:

$$dU - TdS + p.dv = 0 \quad \cdots \quad (1').$$

Будемъ въ этомъ ур. считать p и T за независимыя перемѣнныя. Для обращаемыхъ процессовъ, въ которыхъ p и T постоянны, первая часть представитъ полный дифференціалъ, т.е.

$$d(U - TS + pv) = 0 \quad \cdots \cdots \quad (2)$$

Пусть $U - TS + pv = F(x)$; мы видѣли выше, что это одна изъ тѣхъ функцій, для которыхъ $dF < 0$ въ самопроизвольныхъ процессахъ; для равновѣсія системы которые можетъ наступить въ концѣ необращаемаго процесса, должно быть: $dF = 0$ или $d(U - TS + pv) = 0$.

Функція F носитъ названіе термодинамическаго потенціала при постоянномъ давленіи. Здѣсь названіе потенціала введено по аналогіи свойствъ этой функціи съ свойствами функцій, разсматриваемыхъ въ механикѣ, и пріобрѣтающихъ наибольшія или наименьшія значенія при равновѣсіи системъ.

Разсмотримъ нѣкоторыя ~~изъ~~ слѣдствія, вытекающія изъ вида функціи F. Возьмемъ полный дифференціалъ отъ F:

$$dF = dU - T.dS - S\,dT + p.dv + v.dp.$$

Принимая во вниманіе ур.(1), получаемъ:

$$dF = -S.dT + v.dp.$$

Т.к. T и p суть независимыя перемѣнныя, то

$$S = -\frac{dF}{dT} \quad и \quad v = \frac{dF}{dp},$$

т.е. энтропія равна отрицательной производной отъ термодинамическаго потенціала по температурѣ, а объемъ - положительной производной отъ него-же по давленію.

Черезъ термодинамическій потенціалъ мы можемъ выразить и внутреннюю энергію тѣла, а также теплоемкость при постоянномъ давленіи, разность теплоемкостей $c_p - c_v$, коэффиціентъ расширенія тѣла α и коэффиціентъ сжатія Δ тѣла въ изотермическомъ процессѣ.

Подставляя въ ур. для F (2) полученныя сейчасъ выраженія S и v, получимъ

$$U = F - T\frac{dF}{dT} - p\frac{dF}{dp} \quad \cdots \quad (3)$$

Напомнимъ, что теплоемкость при постоянномъ давленіи выражается такъ:

$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$, или вставляемъ сюда значеніе dQ: $C_p = T\left(\frac{dS}{dT}\right)_p$, а затѣмъ сюда значеніе dS: $C_p = -T\left(\frac{d^2F}{dT^2}\right)_p$, или

$$C_p = -T\frac{d^2F}{dT^2} \quad \cdots \quad (4)$$

Разность теплоемкостей $c_p - c_v$ выражалась такъ:

$$c_p - c_v = -\mathcal{T}\,\frac{\left(\frac{dv}{d\mathcal{T}}\right)_p}{\left(\frac{dv}{dp}\right)_\mathcal{T}}$$

Подставляя сюда значеніе v, получимъ

$$c_p - c_v = -\mathcal{T}\,\frac{\left(\frac{d^2\mathcal{F}}{dp\,d\mathcal{T}}\right)^2}{\frac{d^2\mathcal{F}}{dp^2}} \quad \ldots\ldots (5)$$

Коэффиціентъ расширенія α имѣетъ такое выраженіе:

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{d\mathcal{T}}\right)_p \ ; \text{ слѣд.,} \quad \alpha = \frac{\frac{d^2\mathcal{F}}{dp\,d\mathcal{T}}}{\frac{d\mathcal{F}}{dp}} \quad \ldots (6)$$

а коэффиціентъ сжатія Δ такое:

$$\Delta = -\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_\mathcal{T} \ ; \text{ слѣд.,} \ \Delta = -\frac{\frac{d^2\mathcal{F}}{dp^2}}{\frac{d\mathcal{F}}{dp}} \quad \ldots (7)$$

Въ окончательныхъ выраженіяхъ индексы p и $\mathcal{T}$ опущены, такъ какъ они излишни, когда мы принимаемъ p и $\mathcal{T}$ независимыми перемѣнными.

Так. обр., мы видимъ, что существуетъ нѣкоторая функція $\mathcal{F}$, съ помощью которой можно выразить всѣ величины, характеризующія данное тѣло. По аналогіи съ подобной-же функціей, употребляемой въ механикѣ, эту функцію называютъ, какъ мы уже сказали выше, термодинамическимъ потенціаломъ.

Функція $\mathcal{F}$ и термодинамическій потенціалъ при постоянномъ объемѣ, который мы разсмотримъ далѣе, введены впервые Massieu и американскимъ ученымъ Gibbs'омъ. Самое названіе введено Duhem'омъ.

§60. Приложимъ теперь свойства функціи $\mathcal{F}$ къ изслѣдованію одного интереснаго вопроса.

Пусть имѣется система тѣлъ, находящихся въ различныхъ физическихъ состояніяхъ и различнаго химическаго состава; тогда термодинамическій потенціалъ всей системы представится суммой потенціаловъ для каждаго отдѣльнаго состоянія. Дѣйствительно, такъ какъ $\mathcal{T}$ и p мы считаемъ независимыми другъ отъ друга и одинаковыми для всѣхъ частей системы, то такъ какъ $U = \Sigma U$, и $S = \Sigma S$, $v = \Sigma v$, то вставляя въ выраженіе $\mathcal{F}$, найдемъ:

$$\mathfrak{F} = \Sigma U - T\Sigma S + p\Sigma v$$

или $$\mathfrak{F} = \Sigma(U - TS + pv).$$

Если назовемъ черезъ $\mathfrak{F}_i$ потенціалъ отдѣльной какой-нб. части, то $\mathfrak{F} = \Sigma\mathfrak{F}_i$, что мы и хотѣли показать.

Разсмотримъ частный случай, когда химическій составъ всѣхъ частей системы одинаковъ, и она представляетъ одно и тоже вещество въ двухъ различныхъ физическихъ состояніяхъ, или фазахъ; напр., въ жидкомъ и газообразномъ состояніи, или твердомъ и жидкомъ, или твердомъ и парообразномъ, или въ двухъ такихъ состояніяхъ, при которыхъ одно есть аллотропическое измѣненіе другого.

Пусть $\mathfrak{F}_A$ есть термодинамическій потенціалъ единицы массы нашего тѣла въ его первомъ состояніи (напр. въ жидкомъ), а $\mathfrak{F}_B$ - потенціалъ единицы массы его во 2^мъ^ состояніи (въ парообразномъ). Пусть часть массы тѣла, находящаяся въ первомъ состояніи есть m_A, а часть, пребывающая во 2^мъ^ состояніи, есть m_B; тогда потенціалъ $\mathfrak{F}$ всей системы будетъ

$$\mathfrak{F} = m_A \cdot \mathfrak{F}_A + m_B \cdot \mathfrak{F}_B \quad \dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

Спросимъ, каково будетъ измѣненіе потенціала, если часть массы (dm_A) тѣла изъ состоянія A перейдетъ въ состояніе B (dm_B).

Возьмемъ дифференціалъ отъ выраженія (α) для $\mathfrak{F}$ по m_A и m_B:

$$d\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_A \, dm_A + \mathfrak{F}_B \, dm_B \quad \dots\dots \quad (\beta)$$

Если положить, что масса m_A убыла, а масса m_B увеличилась, то dm_A есть величина отрицательная, dm_B - положительная; такъ какъ вся масса неизмѣнна, то

$$dm_A + dm_B = 0, \text{ т.е. } -dm_A = dm_B.$$

Итакъ, стало быть, выраженіе (β) можемъ переписать такъ:

$$d\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_B - \mathfrak{F}_A)\, dm_B.$$

Опираясь на это соотношеніе, рѣшимъ, когда процессъ возможенъ и въ какую сторону онъ будетъ идти.

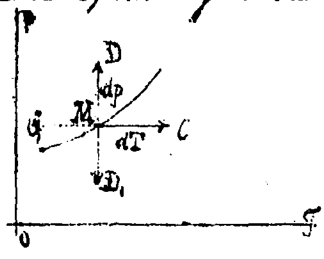
Для самопроизвольнаго процесса $d\mathfrak{F} < 0$, т.е. $d\mathfrak{F} = -$, а потому все зависитъ отъ знака $(\mathfrak{F}_B - \mathfrak{F}_A)$. Когда этотъ знакъ —, то процессъ, состоящій въ увеличеніи массы m_B на счетъ m_A, возможенъ: онъ можетъ самъ собою начаться; когда-же знакъ +, то процессъ будетъ происходить въ сторону убыванія m_B ($dm_B = -$). Наконецъ, когда $\mathcal{F}_B - \mathcal{F}_A = 0$, то $d\mathcal{F} = 0$, и мы имѣемъ случай равновѣсія системы, т.е. отсутствіе взаимнаго превращенія массъ m_A и m_B. Так. обр. условіе равновѣсія есть $\mathcal{F}_B - \mathcal{F}_A = 0$, или-же $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_A$, другими словами, когда термодинамическіе потенціалы частей тѣла, находящихся въ различныхъ состояніяхъ, равны, то имѣемъ равновѣсіе системы (аналогія съ электростатическими явленіями).

Т. к. мы считали p и T независимыми перемѣнными, то $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$ будутъ функціями этихъ параметровъ, что мы можемъ изобразить такъ:

$$\mathcal{F}_A(p, T) = \mathcal{F}_B(p, T) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\gamma)$$

Слѣд., всегда существуетъ извѣстное соотношеніе между давленіемъ и температурой тѣла, когда система находится въ равновѣсіи, т.е. когда 2 состоянія тѣла рядомъ другъ съ другомъ уживаются.

Эта теорема оправдывается опытомъ: жидкость при извѣстной температурѣ обращается въ паръ только опредѣленной упругости, послѣ чего выдѣленіе насыщеннаго пара не бываетъ. То-же самое нужно сказать и относительно явленій диссоціаціи, плавленія и т.д. Мѣняя температуру T, будемъ приходить къ новымъ состояніямъ равновѣсія, при которыхъ p будетъ иное, опредѣляемое изъ условія (γ), выражающаго равенство потенціаловъ тѣла въ $2^{хъ}$ фазахъ. Изображая сказанное графически относительно осей (p, T), увидимъ, что условіе равновѣсія системы выразится нѣ-



которой кривой AB, ур. которой есть (γ). Всѣ точки этой кривой опредѣляются такими p и T, при которыхъ возможно равновѣсіе системы въ $2^{хъ}$ фазахъ. Самопроизвольный переходъ изъ состоянія A въ состояніе B по кривой AB не происходитъ. Процессъ по AB есть обращаемый, т. к. онъ представляетъ послѣдовательность состояній равновѣсія. Интересно отыскать значеніе остальныхъ точекъ плоскости, для которыхъ равновѣсіе $2^{хъ}$ фазъ уже невозможно, слѣд., въ которыхъ тѣло существуетъ только въ одной фазѣ A или B. Такъ какъ для точекъ кривой $\mathfrak{F}_B-\mathfrak{F}_A=0$, то эта разность при переходѣ черезъ кривую должна мѣнять знакъ, то эта кривая AB раздѣляетъ плоскость на 2 части: въ одной изъ нихъ возможно одно состояніе, въ другой - другое. Это-то мы сейчасъ покажемъ подробнѣе. Положимъ, что мы имѣемъ дѣло съ $2^{мя}$ состояніями тѣла — парообразнымъ и жидкимъ, тогда кривая AB будетъ представлять связь между упругостью насыщеннаго пара и температурою, т.е. то состояніе смѣси пара и жидкости, при которомъ любая часть можетъ находиться неизмѣнно въ состояніи пара, а другая въ состояніи жидкости. Мы знаемъ именно, что если въ нѣкоторомъ пространствѣ надъ жидкостью паръ достигъ насыщеннаго состоянія, т.е. опредѣленной упругости $p=f(\mathfrak{T})$, то наступаетъ равновѣсіе, т.е. количества пара и жидкости сохраняются неизмѣнно. Точки внѣ кривой будутъ представлять такія условія, при которыхъ возможно существованіе либо одной жидкости, либо одного пара. Вопросъ, слѣд., сводится къ тому, въ какой части плоскости ея точки соотвѣтствуютъ жидкости и въ какой пару. Мы уже сказали, что кривая раздѣляетъ 2 состоянія тѣла, слѣд., теперь остается рѣшить, по какую сторону кривой расположится одно состояніе (жидкое въ данномъ случаѣ) и по какую другое (парообразное). Для этого нужно разобрать знакъ у выраженія для $d\mathfrak{F}$, который, какъ знаемъ, зависитъ отъ $\overset{2}{\text{разности}}$ $\overset{1}{\text{знака}}$ $\mathfrak{F}_B-\mathfrak{F}_A$.

Пусть потенціалъ тѣла въ состояніи A, $\mathfrak{F}_A$, при удаленіи, напр., изъ M въ какую-нб. сторону отъ кривой вправо или влѣво получаетъ нѣкоторое приращеніе, которое произойдетъ отъ измѣненія температуры; тогда потенціалъ въ новомъ состояніи выразится такъ:

$$\mathfrak{F}'_A = \mathfrak{F}_A + \frac{d\mathfrak{F}_A}{d\mathfrak{T}} d\mathfrak{T}.$$

Точно также для состоянія B

$$\mathfrak{F}'_B = \mathfrak{F}_B + \frac{d\mathfrak{F}_A}{d\mathfrak{T}} d\mathfrak{T}.$$

Составляемъ разность этихъ потенціаловъ:

$$\mathfrak{F}_B - \mathfrak{F}_A + \left(\frac{d\mathfrak{F}_B}{d\mathfrak{T}} - \frac{d\mathfrak{F}_A}{d\mathfrak{T}}\right) d\mathfrak{T} = \mathfrak{F}'_B - \mathfrak{F}'_A = \Delta.$$

Такъ какъ $\mathfrak{F}_B - \mathfrak{F}_A = 0$, то знакъ зависитъ отъ выраженія

$$\Delta = \left(\frac{d\mathfrak{F}_B}{d\mathfrak{T}} - \frac{d\mathfrak{F}_A}{d\mathfrak{T}}\right) d\mathfrak{T}.$$

Мы видѣли, что $-\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathfrak{T}} = S$; слѣд., $\frac{d\mathfrak{F}_A}{d\mathfrak{T}} = -S_A$, $\frac{d\mathfrak{F}_B}{d\mathfrak{T}} = -S_B$; поэтому

$$\Delta = -(S_B - S_A)\, d\mathfrak{T} \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

Пусть скрытая теплота при переходѣ тѣла изъ одного состоянія въ другое есть $\mathcal{L}$. Интегрируя $dQ = \mathfrak{T} dS$, получимъ $Q = \mathfrak{T}(S_B - S_A)$; но легко видѣть, что это Q и есть скрытая теплота $\mathcal{L}$; слѣд.,

$$\mathcal{L} = \mathfrak{T}(S_B - S_A).$$

Въ виду этого соотношеніе (δ) перепишется такъ:

$$\Delta = -\mathcal{L}\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}} \quad \ldots\ldots \quad (\delta').$$

Вставляя (δ') въ $d\mathfrak{F}' = (\mathfrak{F}'_B - \mathfrak{F}'_A)\, dm_B$, получимъ

$$d\mathfrak{F} = -\frac{\mathcal{L}}{\mathfrak{T}} d\mathfrak{T} dm_B \quad \ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Будемъ считать состояніе B конечнымъ, а состояніе A начальнымъ, слѣд. $dm_B = +$. Идя вправо отъ кривой, мы видимъ, что $d\mathfrak{T}$ — положительно; слѣд. чтобы $d\mathfrak{F}'$ было отрицательно, нужно, чтобы $\mathcal{L}$ было положительно. Другими словами, тѣло изъ состоянія A будетъ переходить въ состояніе B при повышеніи температуры, если для такого перехода нужно [illegible] подводить тепло. Т. к. для испаренія [illegible] сти при неизмѣнномъ давленіи, нужно ей сообщать тепло, то заключаемъ, что справа кривой на плоскости (pT) возможно только состояніе парообразное. Итакъ примемъ, что L положительно.

Наоборотъ, гдѣ влѣво отъ кривой, мы видимъ, что $d\mathcal{F}=-$; слѣд., чтобы $d\mathcal{F}$ было $=-$, то, т.к. L по условію имѣетъ знакъ $+$, то dm_B должно быть отрицательно. Слѣд., влѣво состояніе m_B, т.е. такое, которое требуетъ для своего образованія подведенія тепла, существовать не можетъ, т.е. слѣва будетъ происходить превращеніе пара въ жидкость. Слѣд. слѣва нашей кривой возможно состояніе жидкости, или A.

Къ тѣмъ-же результатамъ можно придти и нѣсколько инымъ путемъ. Пусть отъ точки M кривой AB мы переходимъ вверхъ или внизъ, тогда знакъ разности $d\mathcal{F}=(\mathcal{F}_B'-\mathcal{F}_A')dm_B$ опредѣлится соотношеніемъ:

$$\mathcal{F}_B'-\mathcal{F}_A'=\left(\frac{d\mathcal{F}_B}{dp}-\frac{d\mathcal{F}_A}{dp}\right)dp.$$

Но мы видѣли, что $\frac{d\mathcal{F}}{dp}=v$ - удѣльному объему тѣла въ данномъ его состояніи. Слѣд.,

$$v_A=\frac{d\mathcal{F}_A}{dp} \quad и \quad v_B=\frac{d\mathcal{F}_B}{dp}.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}_B'-\mathcal{F}_A'=(v_B-v_A)\,dp \quad и \quad d\mathcal{F}'=(v_B-v_A)\,dp\,dm_B.$$

Для точекъ, лежащихъ сверху кривой AB dp имѣетъ знакъ $+$; слѣд., изъ двухъ состояній для A и B то будетъ конечнымъ, для котораго скобки v_B-v_A будутъ имѣть знакъ, противный dm_B; т.е. въ этомъ случаѣ, если $dm_B=+$, должно быть $v_B<v_A$. Для жидкости удѣльный объемъ меньше, чѣмъ для пара, поэтому dm_B должно представлять приростъ жидкости и въ верхней части плоскости, или слѣва отъ AB мы имѣемъ жидкость.

Аналогично для нижней части, т.е. при $dp=-$ и $dm_B=+$, должно быть $v_B>v_A$, т.е. удѣльный объемъ въ состояніи B, въ которое переходитъ система, долженъ быть больше, чѣмъ въ состояніи А, - это соотвѣтствуетъ случаю испаренія жидкости; слѣд., внизъ или вправо отъ кривой АВ возможно лишь парообразное состояніе тѣла.

Предыдущее понятно: въ точкѣ М имѣемъ жидкость и насыщенный паръ при p и T. Переходъ МС соотвѣтствуетъ увеличенію T при сохраненіи того-же p: очевидно будетъ испареніе, и чтобы сохранить p неизмѣннымъ, намъ нужно будетъ увеличивать объемъ сосуда, и это придется дѣлать до тѣхъ поръ, пока не испарится вся жидкость; слѣд, вправо отъ АВ можетъ существовать только паръ; также разберемъ и другіе случаи.

Разсмотримъ теперь уравненіе для точекъ нашей кривой, которое писалось такъ: $F_B - F_A = 0$. Пусть изъ точки М этой кривой мы перешли къ безконечно-близкой другой точкѣ М', - тогда давленіе и температура измѣнятся на dp и dT; эти dp и dT должны удовлетворять дифференціалу уравненія кривой, ибо точка М' лежитъ на самой кривой. Так. обр. можемъ написать:

$$\left(\frac{dF_B}{dT} - \frac{dF_A}{dT}\right) dT + \left(\frac{dF_B}{dp} - \frac{dF_A}{dp}\right) dp = 0.$$

Мы имѣли выше немного, что

$$\frac{dF_B}{dT} - \frac{dF_A}{dT} = -\frac{L}{T} dT \quad и \quad \frac{dF_B}{dp} - \frac{dF_A}{dp} = v_B - v_A .$$

Поэтому вышенаписанное уравненіе приметъ видъ:

$$-\frac{L}{T} dT + (v_B - v_A)\, dp = 0,$$

откуда опредѣлимъ скрытую теплоту испаренія (или измѣненія одного состоянія тѣла въ другое):

$$L = T(v_B - v_A)\frac{dp}{dT}.$$

Это есть знакомое намъ ур. Клапейрона въ механическихъ единицахъ.

Подобныя-же разсужденія и методы мы можемъ примѣнять и къ системамъ, состоящимъ изъ одного и того-же тѣла въ двухъ какихъ-нб. фазахъ.

§61. Остановимся теперь на термодинамическомъ потенціалѣ другого рода.

Разсмотримъ съ этою цѣлью такое выраженіе: $\mathfrak{F}'=U-\vartheta S$, для котораго въ самопроизвольныхъ процессахъ $d\mathfrak{F}<0$.

Будемъ считать здѣсь ϑ и v независимыми перемѣнными, такъ что новый потенціалъ будетъ браться при постоянныхъ ϑ и v. Составимъ полный дифференціалъ отъ выраженія $\mathfrak{F}'$.

$$d\mathfrak{F}'=dU-\vartheta dS-S\,d\vartheta.$$

Отсюда, такъ какъ v и ϑ суть независимыя перемѣнныя, найдемъ:

$$S=-\frac{d\mathfrak{F}'}{d\vartheta} \quad \text{и} \quad p=-\frac{d\mathfrak{F}'}{dv} \quad \dots\dots\dots (\varepsilon)$$

Выразимъ теперь U по $\mathfrak{F}'$:

$$U=\mathfrak{F}'-\vartheta\frac{d\mathfrak{F}'}{d\vartheta} \quad \dots\dots\dots (\zeta)$$

Можно опредѣлить, какъ это дѣлали раньше, и всѣ остальныя величины, характеризующія съ точки зрѣнія термодинамики данное тѣло.

$$c_v=\vartheta\left(\frac{dS}{d\vartheta}\right)_v=-\vartheta\frac{d^2\mathfrak{F}'}{d\vartheta^2}\,; \quad c_p-c_v=-\vartheta\frac{\left(\frac{d^2\mathfrak{F}'}{dv\,d\vartheta}\right)^2}{\frac{d^2\mathfrak{F}'}{dv^2}}\,;$$

$$\alpha=-\frac{1}{v}\frac{\frac{d^2\mathfrak{F}'}{dv\,d\vartheta}}{\frac{d^2\mathfrak{F}'}{dv^2}}\,; \quad \Delta=\frac{1}{v\frac{d^2\mathfrak{F}'}{dv^2}} \quad \text{и пр.}$$

Этотъ термодинамическій потенціалъ $\mathfrak{F}'$ по своему выраженію совпадаетъ со свободной энергіей Helmholtz'a, который ввелъ её, когда еще не былъ знакомъ съ работами Массьё и Gibbs'a. Онъ далъ этому термину спеціальное толкованіе. Къ выводу ея выраженія по способу Helmholtz'a мы и приступимъ.

§62. 1ое уравненіе термодинамики въ общемъ видѣ писалось:

$$dU=dQ+dW.$$

Мы считали dQ положительнымъ, если оно выражало тепло, отдаваемое извнѣ нашей системѣ, точно также dW считалось имѣющимъ знакъ +, когда работа отдавалась внѣшней средой. Если въ системѣ происходитъ самопроизвольный процессъ, то система совершаетъ работу; слѣд. $dW = -$, и это будетъ характеристикой самопроизвольности процесса.* Обратимъ на это особое вниманіе.

§ 63. Разсмотримъ сначала процессы обращаемые. Пусть состояніе системы опредѣляется какими-нб. координатами. Эти величины могутъ характеризовать положенія точекъ системы, ея электрическое состояніе, химическое и т. д. Пусть температура тѣла есть ϑ, причемъ во всѣхъ частяхъ его ϑ и p одинаковы. Пусть упомянутыя координаты будутъ $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Чтобы система получила нѣкоторыя измѣненія въ координатахъ, напр. $dx_1, dx_2, \dots dx_n$, слѣдуетъ ей сообщить тепло. Пусть это количество тепла будетъ

$$dQ = A\,dx_1 + B\,dx_2 + C\,dx_3 + \dots + Y\,d\vartheta \dots (a)$$

Относительно работы, произведенной системою, допустимъ, что она не зависитъ отъ температуры тѣла, т. е. она опредѣляется только измѣненіемъ координатъ $x_1, x_2, \dots x_n$ (такой случай, обыкновенно, разсматривается въ механикѣ). При этомъ допущеніи имѣемъ:

$$dW = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots + X_n\,dx_n \dots (b)$$

Подставляемъ выраженія (a) и (b) въ выраженіе 1^го^ закона термодинамики, тогда получимъ:

$$dU = (A + X_1)dx_1 + (B + X_2)dx_2 + (C + X_3)dx_3 + \dots + Y\,d\vartheta.$$

Внося въ выраженіе второго закона термодинамики $dS = \frac{dQ}{\vartheta}$ значеніе $dQ\,(a)$, получимъ

$$dS = \frac{A}{\vartheta}dx_1 + \frac{B}{\vartheta}dx_2 + \frac{C}{\vartheta}dx_3 + \dots + \frac{Y}{\vartheta}d\vartheta.$$

Наши dU и dS должны быть полными дифференціалами, — поэтому

$$A + X_1 = \frac{dU}{dx_1}, \quad B + X_2 = \frac{dU}{dx_2}, \text{ и т. д.} \dots\dots (\alpha)$$

$$Y = \frac{dU}{d\vartheta} \dots\dots (\beta)$$

Затѣмъ

$$\frac{A}{\vartheta} = \frac{dS}{dx_1}, \quad \frac{B}{\vartheta} = \frac{dS}{dx_2}, \dots\dots, \frac{Y}{\vartheta} = \frac{dS}{d\vartheta}, \text{ или-же}$$

$$A = \vartheta\frac{dS}{dx_1}, \quad B = \vartheta\frac{dS}{dx_2}, \text{ и т. д.} \dots (\alpha') \text{ и } Y = \vartheta\frac{dS}{d\vartheta} \dots (\beta').$$

Изъ ур. (β) и (β') можемъ написать, что

$$\frac{dU}{d\mathcal{T}} = \mathcal{T}\frac{dS}{d\mathcal{T}} \quad . \ . \ . \ . \ (c)$$

Составимъ функцію $F = U - \mathcal{T}S$ и возьмемъ отъ нея производную по $\mathcal{T}$:

$$\frac{dF'}{d\mathcal{T}} = \frac{dU}{d\mathcal{T}} - \mathcal{T}\frac{dS}{d\mathcal{T}} - S,$$

или въ виду (c), получимъ:

$$\frac{dF'}{d\mathcal{T}} = -S,$$

уравненіе, которое мы и ранѣе имѣли.

Подставляя это значеніе S въ выраженіе для F, имѣемъ:

$$U = F' - \mathcal{T}\frac{dF'}{d\mathcal{T}}.$$

Изъ ур. (α) можемъ найти A:

$$A = -\mathcal{T}\frac{dS}{dx} = -\mathcal{T}\frac{d^2F'}{d\mathcal{T}\,dx_1} \quad . \ . \ . \ . \ (d)$$

Вносся это значеніе A въ (a), а также и значеніе dU, получимъ:

$$+\mathcal{T}\frac{dS}{dx_1} + X_1 = \frac{dF'}{dx_1} - \mathcal{T}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dF'}{d\mathcal{T}}\right),$$

или-же

$$\mathcal{T}\frac{dS}{dx_1} + X_1 = \frac{dF'}{dx_1} + \mathcal{T}\frac{dS}{dx_1}$$

и слѣд.,

$$X_1 = \frac{dF'}{dx_1}$$

Аналогично получимъ: $X_2 = \frac{dF'}{dx_2}$ и т.д.

X_1, X_2 и т.д. - величины, входившія въ выраженіе внѣшней работы, должны представлять силы, дѣйствующія извнѣ на нашу систему.

При этомъ съ терминомъ сила мы соединяемъ здѣсь представленіе болѣе общее, чѣмъ обычное: X_1 есть причина, увеличивающая перемѣнную x_1, и т.д. Имъ противодѣйствуютъ внутреннія силы этой системы; назовемъ эти силы черезъ X_1', X_2' и т.д. Тогда можемъ написать, что

$$X_1' = -\frac{dF'}{dx_1}, \quad X_2' = -\frac{dF'}{dx_2} \text{ и т.д.}$$

(Пишемъ —, ибо эти силы по направленію противоположны внѣшнимъ силамъ).

Пока температура тѣла не измѣняется, какъ мы и приняли, при составленіи выраженія внѣшней работы, внутреннія силы равны отрицательной производной отъ выраженія потенціальной энергіи системы Π, или-по Клаузіусу-отъ эргала системы. Так. обр. имѣемъ, что

$$X_1' = -\frac{d\Pi}{dx_1}, \quad X_2' = -\frac{d\Pi}{dx_2}, \text{ и т. д.} \quad \dots\dots (e')$$

Сравнивая выраженія (e) и (e'), получаемъ, что функція F совпадаетъ съ функціей Π. Она можетъ отличаться отъ нее только нѣкоторое постоянное. Потенціальная энергія Π есть то количество энергіи, которое цѣликомъ можетъ перейти въ работу, будетъ-ли то работа противъ внѣшнихъ силъ, или работа, идущая на сообщеніе тѣлу живой силы (кинетической энергіи) и т. д. Это (~~энергія~~) опредѣленіе потенціальной энергіи и совпаденіе функціи F съ Π, выражающихъ эту энергію, дало поводъ Helmholtz'у называть функцію F' свободной энергіей системы. Это есть то количество энергіи системы, ~~которое~~ цѣликомъ можетъ перейти въ работу. Мы знаемъ, что тепловая энергія вся полностью не можетъ перейти въ работу, всегда часть ея въ видѣ теплоты отдается очагу съ низшей температурой, слѣд., тепловая энергія неравна свободной, или эргалу для данной системы.

Обратимся къ выраженію для внутренней энергіи U системы, которое можно представить такъ:

$$U = F' + TS \quad \dots\dots (f)$$

Изъ этого выраженія мы видимъ, что внутренняя энергія системы составляется изъ двухъ частей — свободной энергіи F' (freie Energie) и нѣкотораго придатка равнаго TS. Часть TS Helmholtz обозначаетъ буквой J и называетъ связанной энергіей (gebundene Energie).

Так. обр.,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Свободная энергія} & F' = U + TS & \dots (a) \\ \text{Связанная} \text{ ——} & J = TS = -T\frac{dF'}{dT} & \dots (b) \\ \text{Внутренняя} \text{ ——} & U = F' + J & \dots (c) \end{array}\right\} (g)$$

Прослѣдимъ далѣе измѣненіе взаимное свободной энергіи и связанной.

Дифференцируемъ выраженіе для J:

$$dJ = TdS + SdT \quad \dots\dots (d)$$

Умовъ. Механ. теор. теплоты

Замѣтимъ, что F' измѣняется какъ въ зависимости отъ координатъ x_1, x_2 и т. д., такъ и въ зависимости отъ температуры T. Сказанное можемъ выразить такъ:

$$dF' = d_x F' + \frac{dF'}{dT} dT,$$

Гдѣ $d_x F'$ есть дифференціалъ отъ F' по перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots$; оно выражается такъ:

$$d_x F' = X_1' dx_1 + X_2' dx_2 + \ldots + X_n' dx_n = -d_x \Pi,$$

т. к. измѣненіе потенціальной энергіи, взятое со знакомъ —, равно работѣ внутреннихъ силъ системы. Так. обр. получимъ, что

$$dF' = d_x \Pi - S dT \quad \ldots \quad (i)$$

ибо $\frac{dF'}{dT} = -S$. $dQ = TdS + SdT$

Сравнивая теперь выраженія dJ (h) и dF' (i), видимъ, что dJ состоитъ изъ 2-хъ частей: изъ $TdS = dQ$ — количество тепла, сообщеннаго системѣ и величины $S \cdot dT$, равной убыли свободной энергіи, происшедшей за то-же время.

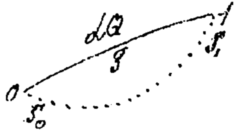
Если $dT = 0$, $T = Const.$, то $dJ = TdS$, т. е. измѣненіе связанной энергіи = исключительно количеству сообщеннаго тепла, а $dF' = d_x \Pi$, т. е. равно измѣненію свободной энергіи. Итакъ полное измѣненіе, или полный дифференціалъ функціи F' представляетъ дифференціалъ работы только въ изотермическомъ процессѣ. Въ этомъ случаѣ вся свободная энергія системы идетъ на работу. Ибо если T увеличивается, то и dJ увеличивается, и при томъ не только первая часть его, но и вторая, которая, какъ видно изъ выраженія (i), заимствуется изъ свободной энергіи системы. Въ этомъ случаѣ только часть dF', именно $d_x F'$, переходитъ въ работу, а $\frac{dF'}{dT} dT = -S dT$ (см. i) идетъ какъ $+S dT$ на увеличеніе связанной энергіи, о чемъ говорилось выше.

Для уясненія представленія о свободной и связанной энергіи Helmholtz раздѣляетъ всѣ движенія, существующія въ какой-нб. системѣ, на стройныя и нестройныя. Стройныя суть такія движенія, въ которыхъ скорости отдѣльныхъ частей системы могутъ быть выражены непрерывными функціями координатъ и времени; въ нестройныхъ-же движеніяхъ скорости такъ не могутъ быть представлены. Въ первыхъ движеніяхъ мы имѣемъ связь между скоростями ~~отдѣльныхъ~~ сосѣднихъ частей системы, во вторыхъ этой связи не существуетъ. Вся внутренняя энергія по Helmholtz'у состоитъ изъ нестройныхъ движеній, и только часть ихъ можетъ превращаться въ стройныя, т.е. въ кинетическую энергію, во внѣшнюю работу и т.д. Онъ прибавляетъ, что нашими органами нельзя открыть, существуютъ-ли такіе способы и условія, при которыхъ всѣ нестройныя движенія могутъ превращаться въ стройныя; очень возможно, что тонкая структура тканей организмовъ способна это дѣлать, хотя это совершенно еще неизвѣстно.

Для изотермическаго процесса, какъ мы видѣли (g)(b) $J=TS$, т.е. S пропорціонально связанной энергіи J; т.к. послѣдняя состоитъ изъ нестройныхъ движеній, то S, т.е. энтропія можетъ быть разсматриваема какъ мѣра нестройности.

§64. Перейдемъ теперь къ процессамъ необращаемымъ; при этомъ посмотримъ, не можемъ-ли изъ послѣдующихъ разсужденій почерпнуть какихъ-нб. правила для самопроизвольныхъ процессовъ.

Пусть тѣло совершаетъ необращаемый процессъ отъ 0 до 1.



Сообщаемъ ему въ отдѣльные его моменты количества тепла dQ при соотвѣтственной температурѣ T. Пусть изъ положенія 1 мы возвращаемъ тѣло наше въ положеніе начальное обращаемымъ процессомъ. Для втораго процесса мы въ этомъ случаѣ имѣемъ право ввести понятіе объ энтропіи. Пусть энтропія тѣла въ положеніи 0 есть S_0, а въ положенію 1 S_1; тогда можемъ написать, какъ это у насъ уже было:

$$\int_0^1 \frac{dQ}{\mathcal{T}} + S_0 - S_1 \leqq 0.$$

Пусть процессъ былъ изотермическій; тогда интегрируя, получаемъ

$$(Q)_0^1 + \mathcal{T}S_0 - \mathcal{T}S_1 \leqq 0$$

По первому закону термодинамики имѣемъ право написать, что $(Q)_0^1 + W = (U)_0^1$, или-же $Q = U + W$.

Вставляя это значеніе Q въ предыдущее выраженіе, получимъ

$$U_1 - U_0 - W + \mathcal{T}S_0 - \mathcal{T}S_1 \leqq 0.$$

Т. к. $U - \mathcal{T}S = \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 - W \leqq 0$.

Мы уже говорили немного выше, что для самопроизвольныхъ процессовъ W всегда отрицательно, что и служитъ характернымъ признакомъ такихъ процессовъ. Поэтому

$$\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 \leqq W \leqq \text{Отриц. вел.}$$

Слѣд., всегда $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 \leqq 0$, или $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_0$ . . . . . . (к).

Отсюда видимъ, что самопроизвольный процессъ всегда происходитъ въ томъ направленіи, въ которомъ свободная энергія системы убываетъ. Въ результатѣ при этомъ всегда при этомъ является накопленіе связанной энергіи.

Высказывалось мнѣніе, что только такіе химическіе процессы могутъ быть самопроизвольны, которые сопровождаются выдѣленіемъ тепла (принципъ наибольшей работы Бертело), т.е. для которыхъ $Q < 0$ (ибо выдѣляемое тепло считается отрицательнымъ). Такъ какъ $Q = U_1 - U_0 + W$ и $W < 0$, $Q < 0$, то $U_1 < U_0$.

Но мы видимъ, что истинный признакъ самопроизвольности процесса есть $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_0$, т.е. уменьшеніе свободной энергіи; такое уменьшеніе вовсе не связано съ уменьшеніемъ внутренней энергіи системы, ибо рядомъ съ уменьшеніемъ энергіи свободной можетъ происходить возрастаніе энергіи связанной. Поэтому самопроизвольными могутъ быть и такіе химическіе процессы, для которыхъ $Q > 0$.

XII. Равновѣсіе системъ.

§65. Перейдемъ теперь отъ этихъ общихъ соображеній къ нѣкоторымъ частнымъ, именно къ вопросу о равновѣсіи неоднородной системы, о чемъ мы немного выше уже имѣли случай говорить.

Подъ неоднородной системой мы разумѣемъ не такую, ~~въ~~ въ которой состояніе физическое или химическое можетъ измѣняться отъ одной точки къ другой, но такую, которая состоитъ изъ конечныхъ однородныхъ на своемъ протяженіи частей, при чемъ состояніе мѣняется отъ одной части къ другой. О равновѣсіи неоднородной системы въ первомъ случаѣ не можетъ быть и рѣчи, мы можемъ говорить только о равновѣсіи системы неоднородной во второмъ смыслѣ. Не всякія жидкости могутъ смѣшиваться, поэтому, если дано нѣсколько родовъ жидкостей, то изъ нихъ не всегда можно получить смѣсь, т. е. одну жидкость. Газы-же всѣ могутъ одинаково хорошо смѣшиваться и притомъ во всевозможныхъ пропорціяхъ. Различныя физическія и химическія состоянія тѣла Gibbs называетъ фазами. Так. обр. мы можемъ сказать, что если дана система тѣлъ въ различныхъ состояніяхъ, то въ ней можетъ быть какое-угодно число фазъ твердаго состоянія, нѣсколько жидкаго и всего одна только фаза газообразнаго.

Разсмотримъ случай равновѣсія различныхъ фазъ.

Въ случаѣ равновѣсія $2^{xъ}$ фазъ, напр., жидкости и пара, условіемъ равновѣсія является извѣстное соотношеніе между упругостью или давленіемъ системы и абсолютной температурой ея. Мы видѣли выше, что условіе это выражается равенствомъ термодинамическихъ потенціаловъ для каждой фазы, именно:

$$\mathfrak{F}_1(p\,T) = \mathfrak{F}_2(p\,T).$$

Послѣднее выраженіе не содержитъ массъ тѣлъ, находящихся въ равновѣсіи; слѣд., равновѣсіе фазъ не зависитъ отъ абсолютныхъ массъ той или другой фазы. Это объясняется тѣмъ, что существуетъ между двумя фазами подвижное равновѣсіе: сколько ~~то~~ массы перейдетъ изъ $I^{\text{ой}}$ фазы во $II^{\text{ую}}$, столько-же опять обратно изъ послѣдней фазы въ $I^{\text{ую}}$, и система остается неизмѣнной; подъ вліяніемъ молекулярныхъ силъ такія взаимныя превращенія происходятъ на границѣ раздѣляющей части, находящіяся въ разныхъ фазахъ; увеличеніе поверхности границы не нарушаетъ равенства между превращающимися массами. Толща массъ, лежащихъ по ту и другую сторону границы, не оказываетъ поэтому вліянія на равновѣсіе.

Разсмотримъ случай, когда тѣло можетъ существовать въ $3^{\text{хъ}}$ фазахъ, — напр, въ твердомъ, жидкомъ и газообразномъ видѣ. Пусть термодинамическіе потенціалы каждой фазы суть $\mathcal{F}_1(p,\mathcal{T})$, $\mathcal{F}_2(p,\mathcal{T})$ и $\mathcal{F}_3(p\mathcal{T})$ при независимыхъ перемѣнныхъ p и $\mathcal{T}$, причемъ

$$\mathcal{F}=\mathcal{U}-\mathcal{T}S+pv.$$

Условіе равновѣсія между твердымъ и жидкимъ тѣломъ, или кривая плавленія есть

$$\mathcal{F}_1(p_{12},\mathcal{T})-\mathcal{F}_2(p_{12},\mathcal{T})=0 \quad \dots\dots (1)$$

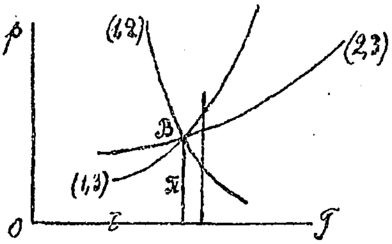
Пользуясь системой координатъ $(p,\mathcal{T})$, получимъ на діаграммѣ нѣкоторую кривую(1,2), выражающую связь между давленіями и температурами тѣла, при которыхъ оно можетъ существовать въ $2^{\text{хъ}}$ указанныхъ фазахъ одновременно; для всякой-же точки, не лежащей на кривой, какъ мы видѣли раньше, возможно только одно состояніе тѣла: или $I^{\text{ая}}$ фаза, или $II^{\text{ая}}$ фаза.

Условіе равновѣсія, т.е. одновременнаго существованія жидкости и пара есть

$$\mathcal{F}_2(p_{23},\mathcal{T})-\mathcal{F}_3(p_{23},\mathcal{T})=0 \quad \dots\dots (2)$$

Это уравненіе дастъ намъ на діаграммѣ вторую кривую(2,3

Аналогично, условіе равновѣсія пара и льда изобразится кривой(1



$$F_3(p_{13}, T) - F_1(p_{13}, T) = 0 \dots\dots (3)$$

Подъ p_{12}, p_{23}, p_{13} разумѣемъ перемѣнныя координаты, измѣняющіяся соотвѣтственно каждой кривой, не забывая этого, опуская для простоты значки. Складывая всѣ три уравненія, мы получимъ $0 = 0$. Кривыя, обладающія такимъ свойствомъ, составляютъ, такъ наз., пучёкъ кривыхъ. Онѣ характеризуются слѣдующимъ: 1) Если двѣ кривыя имѣютъ общую точку, то черезъ нее проходитъ и третья кривая.
2) Если двѣ кривыя сливаются въ нѣкоторой части, то въ той-же части съ ними сливается и третья.

Обнаружимъ это. Опредѣлимъ точку пересѣченія кривыхъ (2,3) и (1,3), координаты которой пусть будутъ π и τ. Для этого намъ нужно совмѣстно рѣшить уравненія (2) и (3) относительно неизвѣстныхъ p и T, которыя и суть искомыя π и τ. Складывая ур. (2) и (3), по подстановкѣ π и τ мы получаемъ

$$F_2(\pi, \tau) - F_1(\pi, \tau) = 0,$$

другими словами, координаты точки пересѣченія π и τ удовлетворяютъ также уравненію (1); слѣд. всѣ три кривыя пересѣкаются въ одной точкѣ. Точка эта называется тройной. Этотъ выводъ опровергаетъ мысль, которой нѣкоторые ученые придерживались, утверждая, что законъ упругости пара надъ льдомъ и надъ водой одинъ и тотъ-же, т.е. что кривыя (1,3) и (2,3) должны совпадать. Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго слѣдуетъ, что чрезъ точку пересѣченія двухъ нашихъ кривыхъ должна проходить и третья; поэтому если кривыя ~~два~~ (1,3) и (2,3) совпадали-бы, то съ ними совпала-бы и кривая (1,2), т.е. всѣ три кривыя должны совмѣститься, что явно невозможно, т.к. кривая (1,2) — плавленія льда — и кривая (2,3) — насыщеннаго пара — имѣютъ совершенно другой ходъ.

Кака

Дѣйствительно, съ возрастаніемъ температуры насыщеннаго пара растетъ и его упругость; слѣд., кривая (2,3), какъ видно на чертежѣ, поднимается слѣва направо. Наоборотъ, при плавленіи льда повышеніе давленія сопровождается пониженіемъ температуры плавленія, и кривая (1,2) поднимается вверхъ справа налѣво. Очевидно, кривая (2,3) и (1,2) совпадать не могутъ, а слѣд., и кривая (2,3) и (1,3). Координаты тройной точки π и τ опредѣляются въ случаѣ воды очень просто. Положимъ, явленія наши происходятъ при давленіи атмосферномъ и температурѣ $= 0^{\circ}$. Если понизимъ давленіе на 1 atm., то температура таянія льда $= 0{,}0075^{\circ}C$; упругость водяныхъ паровъ при этомъ приблиз. $= 4{,}^{mm}57$. Слѣд., $\pi = 4{,}\overset{mm}{57}$, $\tau = 0^{\circ}{,}0075^{\circ}C$.

Выведемъ нѣкоторыя свойства тройной точки. Если возьмемъ точки безконечно-близкія къ тройной, то координаты ихъ можно представить: $\pi + dp$ и $\tau + d\vartheta$, такъ что разлагая $\mathcal{F}(p,\vartheta)$ для такихъ точекъ въ строку и пренебрегая безконечно-малыми высшихъ порядковъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(p,\vartheta) &= \mathcal{F}_1^{0} + \frac{d\mathcal{F}_1}{dp_0}\cdot\frac{dp}{d\vartheta}\,d\vartheta + \frac{d\mathcal{F}_1}{d\vartheta_0}\,d\vartheta \\
\mathcal{F}_2(p,\vartheta) &= \mathcal{F}_2^{0} + \frac{d\mathcal{F}_2}{dp_0}\cdot\frac{dp}{d\vartheta}\,d\vartheta + \frac{d\mathcal{F}_2}{d\vartheta_0}\,d\vartheta \\
\mathcal{F}_3(p,\vartheta) &= \mathcal{F}_3^{0} + \frac{d\mathcal{F}_3}{dp_0}\cdot\frac{dp}{d\vartheta}\,d\vartheta + \frac{d\mathcal{F}_3}{d\vartheta_0}\,d\vartheta
\end{aligned}\right\},\quad\ldots\ldots(4)$$

гдѣ черезъ $\mathcal{F}^{0}$ обозначимъ $\mathcal{F}(\pi,\tau)$.

Произведемъ въ ур. (1) замѣну черезъ выраженіе (4):

$$\mathcal{F}_1^{0} + \frac{d\mathcal{F}_1}{dp_0}\cdot\frac{dp_{12}}{d\vartheta}\,d\vartheta + \frac{d\mathcal{F}_1}{d\vartheta_0}\,d\vartheta - \mathcal{F}_2^{0} - \frac{d\mathcal{F}_2}{dp_0}\cdot\frac{dp_{12}}{d\vartheta}\,d\vartheta - \frac{d\mathcal{F}_2}{d\vartheta_0}\,d\vartheta = 0$$

Т. к. π и τ удовлетворяютъ ур. (1), то $\mathcal{F}_1^{0} - \mathcal{F}_2^{0} = 0$; обозначая $\frac{d\mathcal{F}_1}{d\vartheta_0}$ черезъ $\mathcal{F}_1'$ и $\frac{d\mathcal{F}_2}{d\vartheta_0}$ черезъ $\mathcal{F}_2'$ и сокращая на $d\vartheta$, получимъ:

$$\frac{dp_{12}}{d\vartheta}\left(\frac{d\mathcal{F}_1}{dp_0} - \frac{d\mathcal{F}_2}{dp_0}\right) + \mathcal{F}_1' - \mathcal{F}_2' = 0.$$

Аналогично, ур. (2) и (3) дадутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_{23}}{d\vartheta}\left(\frac{d\mathcal{F}_2}{dp_0} - \frac{d\mathcal{F}_3}{dp_0}\right) + \mathcal{F}_2' - \mathcal{F}_3' &= 0 \\
\frac{dp_{31}}{d\vartheta}\left(\frac{d\mathcal{F}_3}{dp_0} - \frac{d\mathcal{F}_1}{dp_0}\right) + \mathcal{F}_3' - \mathcal{F}_1' &= 0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(5)$$

Выше мы нашли, что удѣльный объемъ тѣла выражается чрезъ термодинамическій потенціалъ слѣд. обр.:

$$v = \frac{d\mathfrak{F}}{dp}.$$

Поэтому ур. (5) представится:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_{12}}{d\vartheta}(v_1 - v_2) + \mathfrak{F}'_1 - \mathfrak{F}'_2 = 0 \\ \frac{dp_{23}}{d\vartheta}(v_2 - v_3) + \mathfrak{F}'_2 - \mathfrak{F}'_3 = 0 \\ \frac{dp_{31}}{d\vartheta}(v_3 - v_1) + \mathfrak{F}'_3 - \mathfrak{F}'_1 = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

Гдѣ v_1 - удѣльный объемъ твердаго тѣла, v_2 - жидкости и v_3 - пара.

Складывая ур. (6), получимъ новое уравненіе:

$$\frac{dp_{12}}{d\vartheta}(v_1 - v_2) + \frac{dp_{23}}{d\vartheta}(v_2 - v_3) + \frac{dp_{31}}{d\vartheta}(v_3 - v_1) = 0 \; \ldots\ldots \; (7)$$

Это ур. даетъ намъ соотношеніе между углами наклоненія элементовъ кривыхъ въ тройной точкѣ, т. к. $\frac{dp}{d\vartheta}$ есть tg. угла касательной къ кривой съ осью ϑ.

Прилагая ур. Clapeyron'а для скрытой теплоты превращенія при переходѣ тѣла изъ состоянія a въ b:

$$r_{ab} = \frac{\vartheta}{E}(v_b - v_a)\frac{dp_{ab}}{d\vartheta}$$

можемъ написать для скрытой теплоты плавленія твердаго тѣла:

$$r_{12} = \frac{\vartheta}{E}(v_2 - v_1)\frac{dp_{12}}{d\vartheta};$$

для скрытой теплоты перехода изъ жидкаго въ газообразное состояніе:

$$r_{23} = \frac{\vartheta}{E}(v_3 - v_2)\frac{dp_{23}}{d\vartheta};$$

для скрытой теплоты перехода изъ твердаго въ газообразное состояніе:

$$r_{13} = \frac{\vartheta}{E}(v_3 - v_1)\frac{dp_{13}}{d\vartheta}.$$

Пользуясь этими формулами, можемъ ур. (7) переписать въ видѣ:

$$-r_{12} - r_{23} + r_{13} = 0,$$

или

$$\underline{r_{13} = r_{12} + r_{23}},$$

т. е. скрытая теплота перехода изъ твердаго состоянія въ газообразное = суммѣ скрытыхъ теплотъ при переходъ между промежуточными фазами.

Преобразовывая ур.(7) еще другимъ способомъ, мы получаемъ возможность судить о расположенiи кривыхъ на нашей дiаграммъ по отношенiю къ тройной точкѣ.

Прибавляя и вычитая последовательно изъ I^{ой} части ур.(7) по $v_3\frac{dp_{12}}{d\vartheta}$, $v_1\frac{dp_{23}}{d\vartheta}$, $v_2\frac{dp_{13}}{d\vartheta}$, мы получимъ слѣдующiя 3 ур.:

$$\left.\begin{aligned}
(v_1-v_3)\left(\frac{dp_{12}}{d\vartheta}-\frac{dp_{31}}{d\vartheta}\right)+(v_3-v_2)\left(\frac{dp_{12}}{d\vartheta}-\frac{dp_{23}}{d\vartheta}\right)=0\\
(v_1-v_3)\left(\frac{dp_{23}}{d\vartheta}-\frac{dp_{31}}{d\vartheta}\right)+(v_2-v_1)\left(\frac{dp_{23}}{d\vartheta}-\frac{dp_{12}}{d\vartheta}\right)=0\\
(v_3-v_2)\left(\frac{dp_{31}}{d\vartheta}-\frac{dp_{23}}{d\vartheta}\right)+(v_2-v_1)\left(\frac{dp_{13}}{d\vartheta}-\frac{dp_{12}}{d\vartheta}\right)=0
\end{aligned}\right\}\cdots(8)$$

Т. к. мы разсматриваемъ точки безконечно-близкiя къ тройной, то давленiе для этихъ точекъ = давленiю тройной точки плюсъ безконечно-малое приращенiе, т.е.

$$p_{12}=\pi+\frac{dp_{12}}{d\vartheta}d\vartheta,\quad p_{31}=\pi+\frac{dp_{13}}{d\vartheta}d\vartheta \text{ и т.д.}$$

Откуда:

$$\frac{p_{12}-p_{31}}{d\vartheta}=\frac{dp_{12}}{d\vartheta}-\frac{dp_{13}}{d\vartheta}.$$

На основанiи этого формулы (8) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
(v_1-v_3)(p_{12}-p_{31})=(v_2-v_3)(p_{12}-p_{23})\\
(v_1-v_3)(p_{23}-p_{31})=(v_1-v_2)(p_{23}-p_{12})\\
(v_3-v_2)(p_{31}-p_{23})=(v_1-v_2)(p_{13}-p_{12})
\end{aligned}\right\}\cdots(8')$$

Представимъ себѣ, что тѣло размѣщено въ 3^{хъ} фазахъ въ смыслѣ возрастающихъ удѣльныхъ объемовъ: $v_3 > v_2 > v_1$.

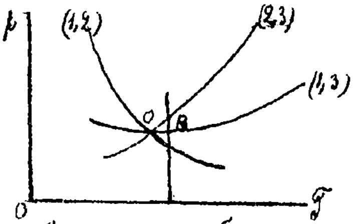
Превращенiе, сопровождающееся наибольшимъ измѣненiемъ въ объемѣ есть: (1,3). Обращаясь къ послѣднему изъ ур.(8'), заключаемъ, что $(p_{13}-p_{23})$ и $(p_{13}-p_{12})$ имѣютъ противоположные знаки, ибо $v_3-v_2=+$ и $v_1-v_2=-$ по нашему положенiю.

Итакъ, если $p_{13} > p_{23}$, то $p_{13} < p_{12}$,

если $p_{13} < p_{23}$, то $p_{13} > p_{12}$.

Слѣд., p_{13} лежитъ между p_{12} и p_{23}.

Представимъ себѣ опять нашу дiаграмму, на ней тройную точку и выходящiя изъ нея три кривыя. Линiя перпендикулярная къ оси абсциссъ, пересѣкается кривыми въ 3^{хъ} точкахъ.



Средняя кривая, пересѣкающая прямую въ точкѣ B, должна соотвѣтствовать кривой наибольшаго измѣненія объема, т.е. кривой (1,3), ибо для этой точки получаемъ значеніе p_{13}, лежащее между p_{12} и p_{23}. Это общія соображенія.

Спеціально для воды, если v_1 относимъ къ твердому, v_2 къ жидкому, v_3 къ газообразному, то имѣемъ $v_3 > v_1 > v_2$, и наибольшее измѣненіе объема соотвѣтствуетъ превращенію (2,3), слѣд. средней кривой въ нужнъ кривая воды и насыщеннаго пара, какъ это видно на чертежѣ.

Отсюда мы и можемъ судить о расположеніи кривыхъ, припоминая наше прежнее замѣчаніе о расположеніи кривой (1,2) – плавленія льда – и кривой (2,3) – насыщеннаго пара воды.

§66. Постараемся теперь вывести соотношеніе между упругостями пара надъ водой и надъ льдомъ.

Скрытая теплота испаренія ^{2}есть ^{1}льда:

$$r_{13} = r_{12} + r_{23}, \quad \dots\dots \quad (9)$$

гдѣ попрежнему:

$$r_{23} = \frac{\vartheta}{\varepsilon}(v_3 - v_2)\frac{dp_{23}}{d\vartheta} \quad \dots\dots \quad (10)$$

v_2 въ сравненіи съ v_3 такъ мало, что можемъ имъ пренебречь; пользуясь закономъ Гей-Люссака $v_3 p_{23} = R\vartheta$, представимъ r_{23} въ такомъ видѣ:

$$r_{23} = \frac{R\vartheta^2}{\varepsilon}\cdot\frac{d(\lg p_{23})}{d\vartheta} \quad \dots\dots \quad (11)$$

Аналогично:

$$r_{13} = \frac{R\vartheta^2}{\varepsilon}\cdot\frac{d(\lg p_{13})}{d\vartheta} \quad \dots\dots \quad (12)$$

Ekholm для температуръ отъ −30° до +30° нашелъ слѣдующую формулу:

$$r_{23} = 596,7 - 0,57t \quad \text{(скрытая теплота испаренія)}$$

Гдѣ t считается отъ обыкновеннаго нуля.

Вводя абсолютную температуру ($t = \vartheta - 273$), имѣемъ:

$$r_{23} = 752,3 - 0,57t \quad \dots\dots \quad (13)$$

По Бунзену и Петерсону

$$r_{12} = 79{,}7 + 0{,}475t = -50{,}0 + 0{,}475T.$$

Вставляя эти r_{23} и r_{12} (скрытая теплота таянія) въ выр. (9), получаемъ:

$$r_{13} = 702{,}3 - 0{,}095T.$$

Выраженіе (12) и послѣднее даютъ:

$$\frac{d}{dT}(\lg p_{13}) = \frac{E}{R}\left[\frac{702{,}3}{T^2} - \frac{0{,}095}{T}\right] \quad \dots\dots (14)$$

Точно также, сравнивая выр. (11) и (13), получаемъ

$$\frac{d}{dT}(\lg p_{23}) = \frac{E}{R}\left[\frac{752{,}3}{T^2} - \frac{0{,}57}{T}\right] \quad \dots\dots (15)$$

Интегрируя (15) и (14):

$$C + \lg p_{23} = \frac{E}{R}\left[-\frac{753}{T} - 0{,}57\lg T\right] \quad \dots\dots (16)$$

$$C_1 + \lg p_{13} = \frac{E}{R}\left[-\frac{702{,}3}{T} - 0{,}095\lg T\right] \quad \dots\dots (17)$$

Намъ нужно опредѣлить разность постоянныхъ $C - C_1$; для этого въ ур. (16) и (17) вмѣсто T подставляемъ 273° — температуру весьма близкую къ температурѣ тройной точки (разница только на 0,0075 C.), тогда $p_{23} = p_{13}$ и $\lg p_{23} = \lg p_{13}$. Вычитая теперь изъ ур. (17) ур. (16) получаемъ:

$$C_1 - C = \frac{E}{R}\left(\frac{50}{273} + 0{,}475\lg 273\right).$$

Опредѣливъ так. обр. $C_1 - C$, вычтемъ изъ ур. (17) ур. (16) и подставимъ найденное значеніе $C_1 - C$; тогда получимъ

$$\lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = \frac{E}{273R}\left[\frac{50(1-273)}{T} + 129{,}7\lg\frac{273}{T}\right]$$

Вотъ искомое соотношеніе между упругостью пара надъ водой и льдомъ.

Мы можемъ послѣднее выраженіе развернуть въ строку и для температуръ незначительно ниже нуля ($T = 273 - t$) получить формулу:

$$\lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = \frac{E\cdot 79{,}7}{(273)^2R}\,t\left[1 + 6{,}82\cdot 10^{-4}t - 1{,}14\cdot 10^{-6}t^2 + \dots\right]$$

Для малыхъ t можно ограничиться первымъ членомъ. Чтобы пользоваться ею, вычислимъ постоянную R для пара. Относя газы къ килограммолекуламъ, получимъ R для всѣхъ газовъ одинаковымъ. Молекулярный вѣсъ воднаго пара = 18. Слѣд., $18R$ есть значеніе общее для всѣхъ газовъ, отнесенныхъ къ килограммолекуламъ, поэтому равно $2E$ (объ этомъ говорилось у насъ уже раньше):

$$18R = 2E \quad и \quad \frac{E}{R} = 9.$$

Приблизительный законъ нашъ выразится, если отбросимъ членъ съ квадратомъ t:

$$19.\quad \lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = \frac{9.79,7}{273^2}\,t = 0,00962t$$

или $t = 104,16 \lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = 239,86 \log\frac{p_{23}}{p_{13}}$,

гдѣ t считается выше отъ нуля.

По этому закону можемъ опредѣлить упругость пара надъ льдомъ, зная упругость пара надъ водой для данной температуры (таблицы Реньо).

Наша приближенная формула можетъ быть получена и прямо изъ (9), считая $r_{12} = 79,7$ и вставляя r_{13} и r_{23} изъ (11) и (12):

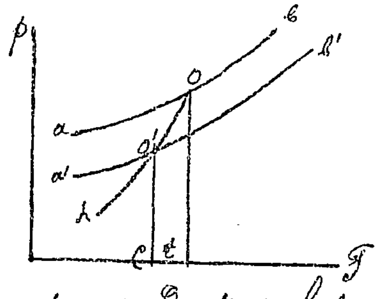
$$\frac{d}{dT}\lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = -\frac{E.79,7}{RT^2};\quad \lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = \frac{E.79,7}{RT} + Const.$$

при $T = 273$, $p_{23} = p_{13}$, откуда $Const. = -\frac{E.79,7}{R.273}$, и

$$\lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = \frac{E.79,7}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{273}\right).$$

Но $\frac{1}{T} = \frac{1}{273+t} = \frac{1}{273}\left(1 + \frac{t}{273}\right)$; отсюда $\lg\frac{p_{23}}{p_{13}} = \frac{E.79,7}{R.273^2}\,t$.

367. Предъидущія соображенія примѣнимы къ вопросу о пониженіи точки замерзанія воды при раствореніи въ ней солей.



На чертежѣ ab представляетъ кривую пара воды. Oλ есть кривая льда и пара. O — тройная точка, соотвѣтствующая приблизительно 0°. Опытъ показываетъ, что упругость воднаго пара надъ растворомъ меньше упругости его надъ чистой водой; поэтому кривая пара раствора пойдетъ ниже ab и будетъ a'b'. Температура замерзанія раствора опредѣляется выдѣленіемъ изъ него чистаго льда. Слѣд., при этой температурѣ имѣетъ мѣсто равновѣсіе между льдомъ, паромъ раствора и растворомъ. Но ледъ можетъ находиться въ равновѣсіи съ паромъ только на кривой пара

Посм
кривa
см. чер

льда. Поэтому при температурѣ замерзанія упругость пара раствора должна быть равна упругости пара льда. Поэтому температура замерзанія раствора есть та, которая соотвѣтствуетъ пересѣченію кривыхъ Oh и ab'. Слѣд., въ точкѣ O' упругость пара раствора $O'C = p_3$, и формула (19) даетъ, слѣд., соотношеніе между пониженіемъ t температуры замерзанія и существующими при этой температурѣ упругостями пара чистой воды и пара раствора.

XIII. Приложеніе принципа свободной энергіи къ явленіямъ электрическимъ.

§68. Пусть имѣется у насъ замкнутая гальваническая цѣпь, въ которой дѣйствуетъ электровозбудительная сила E. Электрическія силы этой цѣпи въ теченіе времени dt при силѣ тока i производятъ работу или развиваютъ электрическую энергію, величина которой есть $Eidt = dW$ . . . . (1)

Величина idt представляетъ то количество электричества, которое протекаетъ черезъ каждое сѣченіе цѣпи во время dt; пусть это количество электричества есть dq; тогда работа dW можетъ быть выражена такъ:

$$dW = Edq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Helmholtz (1847 г.) и Thomson (1851) высказали положеніе, что эта работа равна работѣ химическихъ силъ въ гальваническомъ элементѣ, питающемъ цѣпь, при чемъ за мѣру такой работы принимается тепло, развиваемое химическою реакціею элемента при прохожденіи черезъ него единицы количества электричества. Гальваническая батарея разсматривалась какъ машина, преобразующая химическую энергію въ электрическую. Если A есть количество энергіи химической, освобождающейся въ формѣ тепла при прохожденіи черезъ гальваническій элементъ единицы количества электричества, то съ указанной точки зрѣнія полнаго превращенія химической энергіи въ электрическую:

$$E\,dq = A\,dq \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3),$$

откуда $E = A$.

Если хотимъ выражать E въ вольтахъ и количество электричества въ кулонахъ, то химическая энергія, освобождающаяся въ элементѣ при прохожденіи черезъ него одного кулона будетъ въ джоуляхъ (см. Жуберъ. Электричество пер. Столѣтова. 1892 г. стр. 207; тамъ вмѣсто n стоитъ q):

$$A = 0,0000432\,n \quad \text{и} \quad E = 0,0000432\,n \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4),$$

т. е. электровозбудительная сила равна столькимъ вольтамъ, сколько джаулей освобождается при прохожденіи черезъ элементъ одного кулона.

Здѣсь n есть число граммкалорій, которыя развиваются въ элементѣ на каждый граммэквивалентъ. Такъ для элемента Даніэля при растворенін одного граммэквивалента цинка, т. е. $\frac{Zn}{2} = 32,5$ gr. Zn., въ слабой сѣрной кислотѣ выдѣляется 53045 грамкалорій; вмѣстѣ съ этимъ изъ раствора мѣднаго купороса выдѣляется грамэквивалентъ мѣди, т. е. $\frac{Cu}{2} = 31,5$ gr. Cu, причемъ поглощается 27980 грамкалорій. Поэтому тепло, выдѣляющееся въ элементѣ Даніэля на одинъ грамэквивалентъ есть $n = 53045 - 27980 = 25065$ gr cal. Мы находимъ, слѣд., для электровозбудительной силы элемента Даніэля $E_D = 0,0000432 \times 25065 = 1,08$ volt.

Электровозбудительная сила, вычисляемая изъ предыдущаго соотношенія (4) называется электровозбудительной силой по Helmholtz'у или Thomson'у. Для элемента Даніэля величина ея, получаемая изъ соотношенія (4), вполнѣ сходна съ величиной, получаемой изъ опыта. Но для нѣкоторыхъ элементовъ опытомъ найденная электровозбудительная сила меньше, чѣмъ она получается изъ форм. (4), у нѣкоторыхъ-же больше. При этомъ въ первыхъ элементахъ всегда замѣчается нагрѣваніе ихъ, во вторыхъ ~~о~~ охлажденіе. Это показываетъ, въ противоположность правилу Томсона и Гельмгольца, что не вся химическая энергіи превращается въ энергію электрическую: именно въ первыхъ элементахъ остается избытокъ выдѣляемой химической энергіи, идущей на нагрѣваніе элемента; во вторыхъ оно оказывается недостаточной, такъ что въ электрическую энергію превращается не только тепло, развивающееся при химической реакціи, но еще и теплота составныхъ частей элемента, вслѣдствіе чего послѣдніе охлаждаются.

Въ 1882 г. Гельмгольцъ далъ объясненіе этихъ явленій.

Когда черезъ гальваническій элементъ протекаетъ одно и то-же количество электричества одинъ разъ въ одномъ, другой разъ въ другомъ направленіи, должно различать два случая — именно: элементъ можетъ возвратиться къ своему первоначальному состоянію, или-же нѣтъ. Первый случай представляетъ элементъ Даніэля:

$$Zn \left| \underset{\text{цинковаго купорос. растворъ}}{ZnSO_4} \right| \underset{\text{мѣднаго купорос. растворъ}}{CuSO_4} \Big| \; Cu.$$

Если единица количества электричества протекаетъ приведенную схему слѣва вправо, то растворяется Zn у одного полюса и выдѣляется эквивалентное количество Cu изъ $CuSO_4$ у другого полюса. При обратномъ теченіи электричества вправо — у втораго полюса растворяется мѣдь и у перваго выдѣляется цинкъ въ эквивалентномъ количествѣ; слѣд., элементъ возвращается въ первоначальное состояніе.

Другое явленіе представляетъ элементъ Вольты.

$$Zn \left| \underset{\text{растворъ}}{H_2SO_4} \right| \; Cu$$

Когда е 1 количества электричества проходитъ слѣва вправо, то у 1^го^ полюса растворяется эквивалентъ цинка, а у мѣди выдѣляется водородъ. При обратномъ теченіи электричества вправо у втораго полюса растворяется мѣдь, а на цинкѣ выдѣляется водородъ. Въ концѣ процесса, слѣд., эквивалентныя количества Zn и Cu перешли въ растворъ, и выдѣлилось 2 эквивалента водорода. Поэтому система не возвращается къ своему первоначальному состоянію. ~~Первы~~

Первый изъ этихъ элементовъ есть неполяризующійся, а второй поляризующійся: сообразно съ этимъ въ первыхъ элементахъ процессы оборотны, во вторыхъ необоротны. Оборотность процессовъ обусловливается тѣмъ, что металлъ погруженъ въ растворъ его соли: вслѣдствіе этого при одномъ направленіи тока растворяется металлъ, при противоположномъ онъ выдѣляется изъ раствора. При безконечно-маломъ напряженіи тока можно пренебречь теплотою Джауля, развивающейся въ гальванической цѣпи и пропорціональной квадрату тока. Въ этомъ случаѣ процессы въ цѣпи, содержащей оборотный гальваническій элементъ, обращаемы. Мы приложимъ къ нимъ принципъ свободной энергіи; ея выраженіе, какъ извѣстно, есть:

$$\mathfrak{F} = U + \mathfrak{T}S = U + \mathfrak{T}\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathfrak{T}}.$$

Было показано раньше, что работа внутреннихъ силъ системы можетъ быть представлена въ видѣ:

$$X dx + X_1 dx_1 + \cdots\cdots = -d\mathfrak{F}, \text{ откуда}$$

$$X = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \quad X_1 = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_1}, \quad \ldots\ldots$$

Т. к. въ случаѣ гальванической цѣпи работа есть $E\,dq$, то легко видѣть изъ предыдущаго, что $E = X$, $dq = dx$ (ибо съ X и x мы не соединяемъ никакихъ особыхъ механическихъ представленій), и слѣд.,

$$E = -\frac{d\mathfrak{F}}{dq} = -\frac{dU}{dq} - \mathfrak{T}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\mathfrak{T}\,dq}.$$

Пусть мы разсматриваемъ обращаемый изотермическій процессъ. Замѣнимъ $-\frac{d\mathfrak{F}}{dq}$ въ предыд. ур. черезъ E, — тогда

$$E = -\frac{d\mathfrak{F}}{dq} = -\frac{dU}{dq} + \mathfrak{T}\frac{dE}{d\mathfrak{T}} \quad \ldots \quad (5).$$

Разсмотримъ теперь, какое значеніе имѣетъ каждый членъ этого соотношенія. U въ данномъ случаѣ есть внутренняя энергія веществъ, составляющихъ гальваническій элементъ, а $\frac{dU}{dq}$ есть измѣненіе этой энергіи на 1 кулонъ электричества (когда таковое количество его протекаетъ черезъ элементъ). Величина $\frac{dU}{dq} = -$, ибо U убываетъ вслѣдствіе реакціи въ элементѣ; – так. обр. $-\frac{dU}{dq} = 0,0000432\, n$ (= химической энергіи A), и слѣд.,

$$\mathcal{E} = 0,0000432\, n + \vartheta \frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta} \quad \cdots\cdots (5a).$$

Электровозбудительная сила цѣпи, какъ извѣстно, слагается изъ разностей потенціаловъ, имѣющихся въ точкахъ прикосновенія разнородныхъ частей гальванической цѣпи. Поэтому $\mathcal{E} = \Sigma e$, гдѣ e есть одна изъ такихъ разностей. Так. обр. имѣемъ:

$$\mathcal{E} = 0,0000432\, n + \Sigma \vartheta \frac{de}{d\vartheta} \quad 5$$

Формула (5a) показываетъ, что электровозбудительная сила зависитъ отъ измѣненія ея съ температурой. Для нѣкоторыхъ элементовъ, въ томъ числѣ и Даніэля, для котораго $\frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta} = 0,000034$ volt., это величина весьма малая, такъ что ею можно пренебречь, – тогда получаемъ формулу Helmholtz'a и Thomson'a (4). Мы видимъ, что $\mathcal{E} - A = \vartheta \frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta}$. Если $\frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta} = +$, т.е. если при нагрѣваніи элемента электровозбудительная сила возрастаетъ, то $\mathcal{E} > A$; если-же $\frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta} = -$, то $\mathcal{E} < A$.

Мы видѣли, что опытъ показываетъ, что нѣкоторые элементы при прохожденіи тока нагрѣваются, а другіе охлаждаются. Найдемъ-же, сколько тепла надо сообщить или отнять отъ элемента, для того чтобы температура его оставалась неизмѣнной при прохожденіи количества электричества dq. Пусть это тепло будетъ dQ; по $1^{\text{му}}$ закону термодинамики $dQ = dU + dW$. Измѣненіе внутренней энергіи dU системы происходитъ во $1^{\text{хъ}}$ вслѣдствіе измѣненія температуры системы и во $2^{\text{хъ}}$ отъ химическихъ реакцій, происходящихъ внутри элемента. Так. обр. можемъ написать:

$$dQ = \frac{dU}{d\vartheta} d\vartheta + \frac{dU}{dq} dq + \mathcal{E} dq \quad \cdots\cdots (6)$$

Изъ соотношенія (5) имѣемъ:

$$\left(\mathcal{E} + \frac{dU}{d\vartheta} d\vartheta\right) \quad \mathcal{E} + \frac{dU}{dq} = \vartheta \frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta},$$

поэтому:

$$dQ = \frac{dU}{d\vartheta} d\vartheta + \vartheta \frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta} dq.$$

Если процессъ изотермическій, то $d\vartheta = 0$, и мы получаемъ:

$$dQ = \vartheta \frac{d\mathcal{E}}{d\vartheta} dq \quad \cdots\cdots (6a)$$

Таково должно быть количество тепла, сообщенное элементу для того, чтобы температура его не измѣнялась. Мы видимъ отсюда, что $2^{ая}$ часть выраженія (6а) представляетъ собою $2^{ой}$ членъ $1^{ой}$ ~~тер~~ формулы для E.

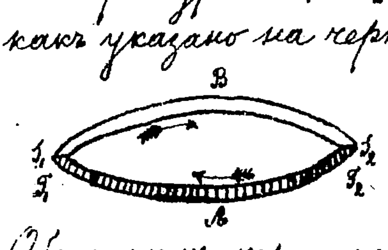
Количество подведеннаго тепла при прохожденіи единицы количества электричества будетъ, слѣд., $Q = T\frac{dE}{dT}$, и слѣд. мы можемъ написать (см. выше)

$$E - A = Q \quad \text{, или} \quad E = A + Q.$$

Для элемента Даніеля $\frac{dE}{dT} = 0$, $Q = 0$, и $E = A$ согласно правилу Томсона. Если $Q = +$, то $E > A$, т.е. для сохраненія температуры такихъ элементовъ имъ должно подводиться тепло; если-же тепло не подводится, то элементъ охлаждается. При $Q = -$ (тепло выдѣляется, должно быть отведено) будетъ $E < A$; если тепло не будетъ отводимо, то элементъ нагрѣвается. Мы видимъ, так. обр., что химическая энергія не превращается цѣликомъ въ электрическую.

Если элемента въ цѣпи совсѣмъ нѣтъ, то $1^{ый}$ членъ въ выраженіяхъ для E, т.е. A, равенъ нулю и мы получаемъ другое толкованіе $2^{го}$ члена, въ эти формулы входящаго. Дѣйствительно, пусть элементъ въ цѣпи отсутствуетъ, но токъ всетаки есть, тогда этотъ членъ будетъ ничто иное, какъ электровозбудительная сила термоэлектрическаго тока цѣпи. Разовьемъ эту мысль.

Представимъ себѣ термоэлектрическій элементъ, т.е. 2 спаянныхъ обоими концами разнородныхъ металлическихъ стержня. Оба спая S_1 и S_2 поддерживаемъ при различныхъ температурахъ T_1 и T_2. Пусть $T_1 > T_2$ и токъ идетъ такъ, какъ указано на чертежѣ. При прохожденіи тока тепло-



та поглощается на спаѣ S_1 и выдѣляется на S_2. Эти теплоты носятъ названіе <u>теплотъ Пельтье.</u>

Обозначимъ черезъ $\omega = F(T)$ коэффиціентъ, характеризующій явленіе Пельтье, т.е. количество тепла, поглощаемаго или выдѣляемаго въ $1''$ при прохожденіи $1^{цы}$ тока.

Тогда тепло, выдѣляемое токомъ i на s_1 будетъ $\omega_1 i = \mathcal{F}(\mathcal{T})i$, поглощаемое на s_2 : $\omega_2 i = \mathcal{F}(\mathcal{T}_2)i$. Кромѣ такого поглощенія и выдѣленія на спаяхъ тепла существуетъ еще поглощеніе и выдѣленіе на всемъ протяженіи стержней, ибо различныя сѣченія ихъ находятся не при одной и той-же температурѣ (явленіе Томсона). Пусть H_A есть тепло, которое либо выдѣляется, либо поглащается въ брускѣ A въ какомъ-нб. его сѣченіи, при разности температуръ по обѣ стороны сѣченія, равной 1°, и при токѣ, равномъ 1^{цу}. Если разность температуръ есть $d\mathcal{T}$, а токъ i, то тепло будетъ $= iH_A\,d\mathcal{T}$. Точно также и для бруска B это тепло будетъ $= iH_B\,d\mathcal{T}$. Если система находится въ стаціонарномъ состояніи, т. е. никакого измѣненія состоянія не претерпѣваетъ, то сумма всѣхъ теплотъ, поглощаемыхъ и выдѣляемыхъ, должна равняться нулю. Мы имѣемъ:

въ спаѣ s_1 поглощается тепло $+\omega_1 i$
——— s_2 выдѣляется ——— $-\omega_2 i$
" на пути A } выдѣляется или поглощается ——— $\int_{\mathcal{T}_2}^{\mathcal{T}_1} iH_A\,d\mathcal{T}$
——— B } ——— $\int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} iH_B\,d\mathcal{T}$.

Затѣмъ нужно принять еще тепло Джауля, идущее на нагрѣваніе цѣпи и $= Ri^2$.

Поэтому

$$i\omega_1 - i\omega_2 + \int_{\mathcal{T}_2}^{\mathcal{T}_1} iH_A\,d\mathcal{T} + Ri^2 + \int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} iH_B\,d\mathcal{T} = 0.$$

Перемѣняемъ въ послѣднемъ интегралѣ порядокъ предѣловъ и сокращаемъ все на постоянное i; тогда получимъ:

$$\omega_1 - \omega_2 + \int_{\mathcal{T}_2}^{\mathcal{T}_1} H_A\,d\mathcal{T} - \int_{\mathcal{T}_2}^{\mathcal{T}_1} H_B\,d\mathcal{T} + Ri = 0.$$

Членъ Ri представляетъ электровозбудительную силу цѣпи — по закону Ома; обозначимъ её черезъ e. Положимъ затѣмъ, что разность $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ безконечно-мала и $= d\mathcal{T}$. Тогда ω_1 и ω_2 должны разниться между собою также на безконечно-малую величину. Поэтому можемъ написать:

$$\omega_1 = \omega_2 + \frac{d\omega}{d\mathcal{T}}\,d\mathcal{T}, \text{ откуда } \omega_1 - \omega_2 = \frac{d\omega}{d\mathcal{T}}\,d\mathcal{T}.$$

При безконечно-малой разницѣ температуръ e есть величина также весьма малая; поэтому можемъ замѣнить e черезъ de. Затѣмъ, т.к. интегралы берутся при безконечно-мало разнящихся предѣлахъ, то вмѣсто нихъ можно взять подъинтегральныя функціи. Так. обр. предыдущее выраженіе переписываемъ такъ:

$$de + \frac{dw}{dT}dT + (H_A - H_B)\,dT = 0.$$

или-же $$\frac{de}{dT} + \frac{dw}{dT} + (H_A - H_B) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Процессъ, происходящій въ нашемъ элементѣ, т.е. рядъ состояній, въ которыя онъ приходитъ послѣдовательно при протеченіи безконечно-малаго количества электричества, есть обращаемый, а потому къ нему можетъ быть примѣненъ 2ой законъ термодинамики. Безконечно-малый токъ, текущій по термоэлементу, можетъ быть разсматриваемъ какъ рядъ движущихся другъ за другомъ безконечно-малыхъ электрическихъ массъ, изъ коихъ каждая обусловливаетъ въ элементѣ круговой обращаемый процессъ, въ концѣ котораго система находится въ такомъ-же состояніи, какъ въ началѣ. Совокупность такихъ процессовъ и обусловливаетъ стаціонарное состояніе термоэлемента. Энтропія такой системы не мѣняется, а потому $\int \frac{dQ}{T} = 0$ для всякого промежутка времени.

Составимъ теперь эту алгебраическую сумму для всѣхъ теплотъ нашей системы:

$$\frac{\omega_1 i}{T} - \frac{\omega_2 i}{T} + \int_{T_2}^{T_1} \frac{iH_A}{T}dT - \int_{T_2}^{T_1} \frac{iH_B}{T}dT = 0.$$

При этомъ теплотою Джауля мы пренебрегаемъ, ибо i считаемъ безконечно-малымъ. Такъ какъ i постоянно, то сокращаемъ на i и переходимъ опять, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, къ безконечно-малымъ величинамъ; т.к. $\frac{\omega_1}{T}$ и $\frac{\omega_2}{T}$ отличаются на безконечно-малую величину, то по строкѣ Тейлора имѣемъ:

$$\frac{\omega_1}{T} = \frac{\omega_2}{T} + \frac{d\left(\frac{\omega}{T}\right)}{dT}dT.$$

Поэтому имѣемъ:

$$\frac{d(\frac{\omega}{\vartheta})}{d\vartheta}d\vartheta + \frac{H_A - H_B}{\vartheta}d\vartheta = 0$$

или-же
$$\frac{d(\frac{\omega}{\vartheta})}{d\vartheta} + \frac{H_A - H_B}{\vartheta} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Вычтемъ это ур.(8) изъ раньше полученнаго (7):
$$\frac{de}{d\vartheta} + \frac{dw}{d\vartheta} - \frac{\vartheta d(\frac{\omega}{\vartheta})}{d\vartheta} = 0.$$

Раскрывая это выраженіе:
$$\frac{de}{d\vartheta} + \frac{dw}{d\vartheta} + \frac{\omega}{\vartheta} - \frac{\vartheta\frac{dw}{d\vartheta}}{\vartheta} = 0$$

или-же
$$\frac{de}{d\vartheta} = -\frac{\omega}{\vartheta},$$

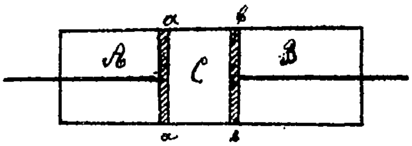
откуда
$$\omega = -\vartheta\frac{de}{d\vartheta} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Таково выраженіе для теплоты Пельтье.
Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (5в), видимъ, что 2ой членъ послѣдняго выраженія представляетъ собою сумму теплотъ Пельтье, развиваемыхъ на границахъ разнородныхъ частей цѣпи. Так. обр., можемъ иначе представить выраженіе для электровозбудительной силы тока:
$$\mathcal{E} = 0,0000432n - \Sigma\omega \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

NB. Теоретическія разсужденія, касающіяся термоэлектрическихъ токовъ, не достаточно строги, такъ какъ многія обстоятельства не приняты во вниманіе.

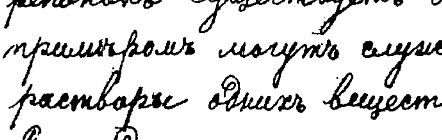
XIV. Приложеніе принципа свободной энергіи къ химическимъ процессамъ.

§69. Прежде всего разсмотримъ смѣшеніе газовъ, не дѣйствующихъ другъ на друга химически.
Благодаря диффузіи газы, помѣщенные въ одинъ сосудъ, смѣшиваются. Этотъ процессъ, самопроизвольно совершающійся, при обыкновенныхъ условіяхъ не даетъ внѣшней работы; но при извѣстныхъ условіяхъ опыта подобная работа можетъ быть получаема.
Для этой цѣли представимъ себѣ цилиндръ съ двумя поршнями а и в, раздѣляющими два газа А и В.



Эти поршни сдѣланы изъ полупроницаемыхъ перепонокъ. Намъ извѣстно, что существуютъ перепонки вполнѣ проницаемыя, т. е. пропускающія сквозь свои поры разнородныя жидкости или газы, которые раздѣляются ими. Мы-же допустимъ, что перепонка аа проницаема только для газа А, а для В непроницаема; точно также перепонка вв проницаема для газа В, а для А непроницаема. Примѣровъ такихъ полупроницаемыхъ перепонокъ въ природѣ много, - напр., водородъ свободно пропускается палладіемъ, но другой газъ не пропускается послѣднимъ; вода, какъ извѣстно, поглощаетъ амміакъ; поэтому пузырь, смоченный водой, можетъ одной стороной поглощать амміакъ, который, растворяясь по водѣ, переходитъ на другую сторону перепонки и выдѣляется въ пространство. Вообще, подобныхъ перепонокъ существуетъ очень много въ органическомъ мірѣ; примѣромъ могутъ служить стѣнки клѣтокъ, которыя растворы однихъ веществъ пропускаютъ, а другихъ нѣтъ. Если сдѣлаемъ такъ, то газъ А будетъ проходить черезъ аа и будетъ давить на вв; точно также газъ В будетъ давить на аа; отъ давленія въ С поршни аа и вв будутъ раздвигаться, и если газа взято достаточно, то поршни отодвинутся до крайнихъ предѣловъ, и въ результатѣ получимъ смѣсь газовъ А и В; так. обр. смѣшеніе газовъ произведетъ работу.

Можно произвести и обратный процессъ, т. е. раздѣлить газы А и В, сдвигая поршни на встрѣчу другъ другу.



Обозначимъ черезъ v_1 начальный объемъ газа А, а черезъ v_2 - начальный объемъ газа В.

Если въ изотермическомъ процессѣ (мы можемъ такъ подводить тепло, чтобы процессъ нашъ былъ изотермическимъ) единица газа расширяется отъ объема v' до v'', то работа, совершаемая газомъ, представится въ видѣ: $RT\lg\frac{v''}{v'}$; если масса газа неравна единицѣ, то для полученія всей работы нужно умножить послѣднее выраженіе на массу газа. Мы знаемъ, что R различно для разныхъ газовъ, но относя R къ килограммолекулѣ газа, мы сдѣлаемъ R одинаковымъ для всѣхъ газовъ; поэтому мы будемъ выражать массы газовъ въ килогр-молекулахъ. Пусть число килограммолекулъ газа A есть n_1, а газа B - n_2. Когда газъ A расширяется отъ $v'=v_1$ до $v''=v_1+v_2$, то онъ совершаетъ работу $n_1RT\lg\frac{v_1+v_2}{v_1}$, а газъ B совершаетъ работу $n_2RT\lg\frac{v_1+v_2}{v_2}$. Полная работа, совершаемая этими газами при диффузіи, есть

$$RT\left[n_1\lg\frac{v_1+v_2}{v_1}+n_2\lg\frac{v_1+v_2}{v_2}\right]=\tau\ \cdot\cdot\cdot\cdot\ (1)$$

Эта формула дана лордомъ Rayleigh'омъ и выражаетъ наибольшую работу, которую мы можемъ при данной температурѣ получить изъ нашей системы.

§70. Перейдемъ теперь къ случаю, когда смѣшеніе газовъ сопровождается химическимъ взаимодѣйствіемъ.

Выраженіе свободной энергіи мы имѣли въ видѣ:

$$F=U+TS.$$

Въ эту общую для всѣхъ состояній тѣла формулу нужно подставить выраженія внутренней энергіи и энтропіи газа. Въ термодинамикѣ газовъ мы имѣли выраженіе внутренней энергіи газа въ видѣ:

$$U=c_vT+\text{Const}.$$

а для энтропіи $S=c_v\lg T+R\lg v+\text{Const}.$

Прежде чѣмъ подставить эти выраженія въ F, видоизмѣнимъ R; оно представлялось коэффиціентомъ при T въ формулѣ $pv=\frac{p_0v_0}{273}T$, $\left(R=\frac{p_0v_0}{273}\right)$.

Для всѣхъ газовъ $\frac{p_0}{273}$ есть постоянная величина (если всегда въ началѣ будемъ имѣть одно и тоже давленіе p_0) т.е. $\frac{p_0}{273}=g$; v_0 есть удѣльный объемъ, т.е. объемъ $1^{\text{цы}}$ массы газа, этотъ объемъ при 0°C обозначимъ черезъ σ, тогда

$$\mathfrak{R} = q\sigma.$$

Для разныхъ газовъ мѣняется σ, а $q = Const.$ Подстановка въ $\mathfrak{F}$ значеній U и S даетъ:

$$\mathfrak{F} = c_v \mathfrak{T} - \mathfrak{T} c_v \lg \mathfrak{T} - \mathfrak{T} q\sigma \lg v - Const. \mathfrak{T} + Const.$$

Собирая рядъ членовъ, зависящихъ только отъ $\mathfrak{T}$ воедино и обозначая ихъ черезъ $\varphi(\mathfrak{T})$, можемъ написать:

$$\mathfrak{F} = \varphi(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T} q\sigma \lg v \quad \cdots\cdots (2).$$

Такъ представляется свободная энергія или термодинамическій потенціалъ для единицы массы газа.

Если у насъ не единица массы, а m единицъ, то свободная энергія будетъ

$$\mathfrak{F} = m\{\varphi(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T} q\sigma \lg v\},$$

гдѣ v есть удѣльный объемъ, т.е. объемъ единицы массы. Пусть масса занимаетъ объемъ V; тогда $v = \frac{V}{m}$. Мы можемъ въ формулѣ написать $\frac{m}{V}$, а у $\lg$ перемѣнить знакъ:

$$\mathfrak{F} = m\left\{\varphi(\mathfrak{T}) + \mathfrak{T} q\sigma \lg \frac{m}{V}\right\} \cdots\cdots (3)$$

- Теперь допустимъ, что имѣемъ 4 газа, массы которыхъ: перваго m_1, втораго m_2, третьяго m_3 и четвертаго μ. Пусть масса m_3 третьяго газа образуется химическимъ взаимодѣйствіемъ m_1 и m_2 въ извѣстныхъ пропорціяхъ. Пусть газъ μ нейтраленъ, не вступаетъ во взаимодѣйствіе ни съ однимъ изъ трехъ первыхъ газовъ, слѣд., мы смотримъ на μ какъ на газъ, разжижающій систему остальныхъ трехъ газовъ.

Спросимъ себя теперь, возможно-ли такое состояніе трехъ этихъ газовъ, которое не сопровождается соединеніемъ $1^{\text{го}}$ и $2^{\text{го}}$ или разложеніемъ $3^{\text{го}}$, т.е. можетъ-ли система находиться въ химическомъ равновѣсіи. Такое состояніе можно себѣ представить такъ, что сколько образуется изъ первыхъ двухъ газовъ третьяго газа m_3, столько обратно изъ m_3, ранѣе существовавшаго, распадается, или диссоціируется на m_1 и m_2, - это, такъ сказать, подвижное равновѣсіе. Напишемъ для подобнаго случая выраженіе свободной энергіи $\mathfrak{F}$, причемъ значенія $\varphi(\mathfrak{T})$ и σ для m_1 будутъ φ_1 и σ_1, для m_2 – φ_2 и σ_2, для m_3 – φ_3 и σ_3, для нейтральнаго μ – f и s; тогда напишемъ:

$$\mathfrak{F} = m_1\left\{\varphi_1(\mathfrak{T}) + \mathfrak{T}g\sigma_1 \lg\frac{m_1}{V}\right\} + m_2\left\{\varphi_2(\mathfrak{T}) + \mathfrak{T}g\sigma_2 \lg\frac{m_2}{V}\right\} + m_3\left\{\varphi_3(\mathfrak{T}) + \mathfrak{T}g\sigma_3 \lg\frac{m}{V}\right\} + \mu\left\{f(\mathfrak{T}) + \mathfrak{T}gs \lg\frac{\mu}{V}\right\} \dots (4)$$

V есть объемъ общій всѣмъ газамъ, т. к. они смѣшаны другъ съ другомъ. Мы знаемъ, что при произвольно совершающемся процессѣ свободная энергія системы уменьшается, т.е. процессъ возможенъ, когда варіація $\delta\mathfrak{F} = -$; система придетъ въ равновѣсіе только тогда, когда значеніе свободной энергіи сдѣлается минимальнымъ, т.е. когда $\delta\mathfrak{F} = 0$. Теперь мы можемъ составить выраженіе и для внутренней энергіи нашей системы, если мы въ выраженіе $\mathfrak{F} = U - \mathfrak{T}S$ вставимъ $S = -\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathfrak{T}}$; тогда

$$U = \mathfrak{F} - \mathfrak{T}\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathfrak{T}} \dots\dots\dots (5).$$

Подставляя сюда выраженія свободной энергіи $\mathfrak{F}$ для каждаго газа, данныя выше, мы найдемъ и выраженіе внутренней энергіи. Сдѣлаемъ это, напр., для газа m_1, – получимъ:

$$u_1 = m_1\left\{\varphi_1(\mathfrak{T}) + \mathfrak{T}g\sigma_1 \lg\frac{m_1}{v}\right\} - \mathfrak{T}m_1\left\{\frac{d\varphi_1(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}} + g\sigma_1 \lg\frac{m_1}{v}\right\}.$$

(Замѣтимъ, что $\mathfrak{T}$ и V независимыя перемѣнныя)

Производя сокращенія, получимъ:

$$u_1 = m_1\left\{\varphi_1(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T}\frac{d\varphi_1}{d\mathfrak{T}}\right\} \dots\dots (6)$$

Полная внутренняя энергія нашей системы получится, если мы подобныя (6) выраженія соединимъ вмѣстѣ, т.е.

$$U = m_1\left\{\varphi_1(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T}\frac{d\varphi_1}{d\mathfrak{T}}\right\} + m_2\left\{\varphi_2(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T}\frac{d\varphi_2}{d\mathfrak{T}}\right\} + m_3\left\{\varphi_3(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T}\frac{d\varphi_3}{d\mathfrak{T}}\right\} + \mu\left\{f(\mathfrak{T}) - \mathfrak{T}\frac{df}{d\mathfrak{T}}\right\} \dots (7)$$

Отсюда видимъ, что внутренняя энергія системы не зависитъ ни отъ давленія, ни отъ объема, а только отъ температуры и массы газовъ, входящихъ въ систему. Предположимъ теперь, что въ нашей системѣ происходятъ измѣненія массъ m_1, m_2, m_3; некоторыя изъ нихъ приходятъ во взаимодѣйствіе, соединяются и т.д. Для того, чтобы изслѣдовать этотъ случай, нужно разсмотрѣть измѣненіе функціи $\mathfrak{F}$ отъ измѣненія m_1, m_2 и m_3 и V (при подобной постановкѣ вопроса V не можетъ считаться неизмѣннымъ). Дѣло сводится, так. обр., къ нахожденію варіаціи функціи $\mathfrak{F}$. Составимъ сперва варіацію термодинамическаго потенціала для перваго газа; (варіація отъ свободной энергіи четвертаго нейтральнаго газа μ будетъ равна 0, — онъ не вступаетъ во взаимодѣйствіе).

$$\delta\mathfrak{F}_1 = \delta m_1\left\{\varphi_1 + g\sigma_1\mathfrak{T}\lg\frac{m_1}{v}\right\} + m_1 g\sigma_1\mathfrak{T}\frac{\delta m_1}{m} - m_1 g\sigma_1\mathfrak{T}\frac{dv}{v}$$

или
$$\delta\mathfrak{F}_1 = \delta m_1\left\{\varphi_1 + g\sigma_1\mathfrak{T}\left(\lg\frac{m_1}{v}+1\right)\right\} - m_1 g\sigma_1\mathfrak{T}\frac{dv}{v}.$$

Варіація термодинамическаго потенціала всей системы представится въ видѣ:

$$(8)\ldots\quad \delta\mathfrak{F} = \delta m_1\left\{\varphi_1 + g\sigma_1\mathfrak{T}\left(\lg\frac{m_1}{v}+1\right)\right\} + \delta m_2\left\{\varphi_2 + g\sigma_2\mathfrak{T}\left(\lg\frac{m_2}{v}+1\right)\right\} + \delta m_3\left\{\varphi_3 + g\sigma_3\mathfrak{T}\lg\left(\frac{m_3}{v}+1\right)\right\} - \left\{m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + m_3\sigma_3 + \mu\sigma\right\}\frac{dv}{v}\cdot g\mathfrak{T}.$$

(Въ послѣднемъ членѣ имѣемъ выраженіе $-g\mathfrak{T}\mu\sigma\frac{dv}{v}$ отъ нейтральнаго газа, т.к. общій объемъ всѣхъ газовъ можетъ измѣняться реакціей; этотъ объемъ въ то-же время есть объемъ и нейтральнаго газа).

Обозначимъ черезъ ω_1 и ω_2 вѣса молекулъ перваго и втораго газовъ и допустимъ, что при образованіи третьяго газа на n_1 молекулъ перваго газа, вступающихъ въ соединеніе, приходится n_2 молекулъ втораго газа; точно также и при разложеніи третьяго газа на n_1 молекулъ перваго газа, выдѣляющихся изъ m_3, приходится n_2 втораго — согласно основному закону химіи. Поэтому, когда первый газъ теряетъ $n_1\omega_1$ единицъ изъ своей массы, то второй газъ теряетъ ~~m~~ $n_2\omega_2$, третій-же газъ пріобрѣтаетъ $n_1\omega_1+n_2\omega_2$. Ибо мы допускаемъ, что полная масса взаимодѣйствующихъ веществъ остается постоянной, т.е.

$$m_1+m_2+m_3 = Const;\ \text{слѣд.}\ \delta m_1+\delta m_2+\delta m_3 = 0.$$

Отсюда мы можемъ судить о знакѣ δm_3, — онъ противоположенъ знаку суммы $(\delta m_1+\delta m_2)$ (когда масса однихъ газовъ убываетъ, то другихъ возрастаетъ). Въ виду этого и указанныхъ выше отношеній, опредѣляющихъ массы, вступающія въ соединенія, мы можемъ написать:

$$\frac{\delta m_1}{n_1\omega_1}=\frac{\delta m_2}{n_2\omega_2}=\frac{\delta m_3}{n_1\omega_1+n_2\omega_2}.$$

Отсюда имѣемъ

$$\delta m_1=\frac{-n_1\omega_1}{n_1\omega_1+n_2\omega_2}\,\delta m_3$$
$$\delta m_2=\frac{-n_2\omega_2}{n_1\omega_1+n_2\omega_2}\,\delta m_3 \quad \dots\dots (9)$$

Внесемъ эти выраженія δm_1 и δm_2 въ $\delta\mathcal{F}$ и ограничимъ наши изслѣдованія реакціями, которыя происходятъ безъ измѣненія объема, т.е. реакціи безъ конденсаціи; при этомъ членъ съ измѣненіемъ объема въ выраженіи варіаціи $\delta\mathcal{F}$ отпадаетъ. Если произведемъ подстановку въ $\delta\mathcal{F}$ δm_1 и δm_2, то можно будетъ привести къ одному знаменателю $(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ и вынести его за знакъ скобокъ; въ скобкахъ получимъ одинъ положительный членъ отъ третьяго газа и два отрицательныхъ отъ перваго и второго газовъ:

$$\delta\mathcal{F}=\Big\{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)\Big[\varphi_3+g\sigma_3\mathcal{T}\Big(1+lg\frac{m_3}{v}\Big)\Big]-n_1\omega_1\Big[\varphi_1+g\sigma_1\mathcal{T}\Big(1+lg\frac{m_1}{v}\Big)\Big]-$$
$$-n_2\omega_2\Big[\varphi_2+g\sigma_2\mathcal{T}\Big(1+lg\frac{m_2}{v}\Big)\Big]\Big\}\frac{\delta m_3}{n_1\omega+n_2\omega_2} \quad \dots\dots (a)$$

Реакція происходитъ безъ измѣненія объема; выразимъ это условіе. Измѣненіе объема перваго газа будетъ $n_1\omega_1\sigma_1$, точно также для второго $n_2\omega_2\sigma_2$. Измѣненіе этихъ объемовъ должно равняться всему измѣненію объема третьяго газа, масса котораго увеличивается на $n_1\omega_1+n_2\omega_2$, а удѣльный объемъ $=\sigma_3$; слѣд., измѣненіе его объема есть $(n_1\omega_1+n_2\omega_2)\sigma_3$; поэтому условіе для системы безъ конденсаціи напишется такъ:

$$\overset{\text{убыль}}{n_1\omega_1\sigma_1+n_2\omega_2\sigma_2}\underset{\text{или обратно.}}{=}\overset{\text{прибыль}}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)\sigma_3} \quad \dots\dots (k)$$

Если съ условіемъ (k) обратимся къ выраженію (a) для $\delta\mathcal{F}$, то замѣтимъ, что члены съ 1-ами въ $\{\ \}$ сократятся, такъ какъ

$$g\mathcal{T}\{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)\sigma_3-n_1\omega_1\sigma_1-n_2\omega_2\sigma_2\}=0.$$

Далѣе $\delta\mathcal{F}$ въ случаѣ равновѣсія $=0$. Напишемъ это условіе;

соединивъ вмѣстѣ члены, зависящіе отъ $\mathcal{T}$ и затѣмъ содержащіе объемы σ_1 и σ_2, и дѣля все на $g\mathcal{T}$:

$$n_1\omega_1\frac{\varphi_3-\varphi_1}{g\mathcal{T}} + n_2\omega_2\frac{\varphi_3-\varphi_2}{g\mathcal{T}} + n_1\omega_1\sigma_1\lg\frac{m_3}{m_1} + n_2\omega_2\sigma_2\lg\frac{m_3}{m_2} = 0.$$

Первые два члена, зависящіе отъ температуры и чиселъ n_1 и n_2, характеризующихъ реакцію, могутъ быть представлены въ видѣ: $-\psi(\mathcal{T})$; тогда условіе равновѣсія системы окончательно напишется:

$$n_1\omega_1\sigma_1\lg\frac{m_3}{m_1} + n_2\omega_2\sigma_2\lg\frac{m_3}{m_2} - \psi(\mathcal{T}) = 0 \quad \ldots\ldots \text{(в)}$$

Вотъ условіе равновѣсія системы, т. е. состоянія, при которомъ ея составъ не измѣняется происходящими реакціями (подвижное равновѣсіе). Если лѣвую часть выраженія (в) означимъ черезъ A, то очевидно что формулу (а) можемъ представить въ видѣ

$$\delta\mathcal{F} = K\cdot A\cdot\delta m_3, \quad \ldots\ldots \text{(с)}$$

гдѣ K есть нѣкоторый коэффиціентъ, не зависящій отъ массъ газовъ.

Покажемъ, что это есть состояніе устойчиваго равновѣсія нашей системы. Пусть въ данный моментъ не образовалось еще всего количества газа m_3, нужнаго для равновѣсія и удовлетворяющаго условію $A = 0$, т.е. $m_3' < m_3$. Въ этомъ случаѣ $A \neq 0$ и $= -$. Процессъ будетъ происходить въ направленіи, при которомъ $\delta\mathcal{F} = -$, а это при $A = -$ будетъ (см. (с)), если $\delta m_3 = +$, — т.е. m_3' будетъ возрастать, и система будетъ приближаться къ равновѣсію. Если $m_3' > m_3$, то $A = +$, и чтобы $\delta\mathcal{F} = -$, нужно, чтобы $\delta m_3 = -$, — т.е. избытокъ газа m_3 будетъ диссоціироваться, и система будетъ приближаться къ равновѣсію, т.е. $A = 0$

Покажемъ, что состояніе равновѣсія будетъ единственнымъ. Пусть существуютъ только массы m_1 и m_2, а $m_3 = 0$, т.е. реакція еще не началась; тогда въ выраженіи A подъ знаками lg'овъ имѣемъ $\frac{0}{m_1}$ и $\frac{0}{m_2}$; слѣд., получимъ $A = -\infty$. Далѣе, когда m_1 или m_2 или оба вмѣстѣ начали убывать, т. е. реакція началась, выраженія съ lg.'ами въ A будутъ возрастать, и когда $m_1 = 0$ (или $m_2 = 0$), то получаемъ второй предѣлъ, т. е. сказанное выраженіе $A = +\infty$. (т. к. $\lg \frac{m_3}{0} = +\infty$). Между этими двумя предѣлами A отъ $-\infty$ до $+\infty$ имѣемъ одно положеніе равновѣсія, когда функція переходитъ черезъ нуль, т. е. когда $A = 0$, а слѣд. $\delta F = 0$. Это и будетъ единственное устойчивое состояніе системы нашихъ газовъ.

Предположимъ, что соединеніе происходитъ такъ, что равное число молекулъ газовъ m_1 и m_2 вступаютъ въ соединеніе, и получимъ удвоенное число молекулъ новаго газа m_3 (опять процессъ происходитъ безъ конденсаціи). Можно считать, что ~~поло~~ 1/2 молекулы втораго газа вступаетъ въ соединеніе съ 1/2 молекулы перваго газа (т. е. $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$) и получается одна молекула третьяго газа. Объемъ 1/2 молекулы перваго газа, вступающаго во взаимодѣйствіе, есть $\frac{\omega_1 \sigma_1}{2}$, а объемъ $\frac{1}{2}$ молекулы втораго газа есть $\frac{\omega_2 \sigma_2}{2}$. Объемъ молекулы третьяго газа выразится: $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \sigma_3$. Условіе процесса безъ конденсаціи будетъ:

$$\frac{\omega_1 \sigma_1}{2} + \frac{\omega_2 \sigma_2}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \sigma_3$$

Внося эти значенія въ условіе равновѣсія (6), получимъ:

$$\frac{\omega_1 \sigma_1}{2} \lg \frac{m_3^2}{m_1 m_2} = \psi(T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Слѣд., для подобнаго рода реакціи находимъ, что въ состояніи равновѣсія отношеніе $\frac{m_3^2}{m_1 m_2}$ имѣетъ величину, независящую отъ состава системы и отъ давленія, подъ которымъ она находится; зависитъ-же исключительно отъ температуры.

Изъ всего сказаннаго мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Для данной температуры и для опредѣленнаго состава системы существуетъ только одно состояніе равновѣсія. Оно не можетъ соотвѣтствовать ни полному отсутствію соединенія ($m_3 = 0$), ни полному соединенію

одного изъ простыхъ газовъ ($m_1=0$ или $m_2=0$, ибо въ указанныхъ случаяхъ $A=$ или $-\infty$, или $+\infty$, но не 0).
Увеличивая m_1, m_2, m_3 въ λ разъ, уравненіе равновѣсія получимъ безъ измѣненія; слѣд., въ подобныхъ системахъ равновѣсіе устанавливается подобнымъ образомъ.
Масса μ не входитъ въ условіе равновѣсія; слѣд., присутствіе нейтральнаго газа не вліяетъ на составъ системы при равновѣсіи.
Въ соединеніяхъ, не сопровождающихся конденсаціей, условія равновѣсія системы не зависятъ отъ давленія, подъ которымъ система находится.

§ 77. Теплота, развиваемая при химическихъ реакціяхъ.

Мы разсматривали три газа 1, 2, 3, массы которыхъ были m_1, m_2, m_3, причемъ $3^{\text{ій}}$ получался изъ соединенія двухъ первыхъ. Мы еще имѣли $4^{\text{ый}}$ газъ - нейтральный, въ соединеніе не вступающій, котораго масса была μ. Пусть количество тепла, выдѣляемое при образованіи $1^{\text{цы}}$ массы $3^{\text{го}}$ газа, есть L; пусть затѣмъ образовалась масса δm_3 этого газа; тогда тепло при образованіи этого количества будетъ:

$$dQ = -L\delta m_3 \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \quad (1)$$

Здѣсь L берется въ калоріяхъ; въ единицахъ-же работы будемъ имѣть:

$$dQ = -EL\delta m_3 \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \quad (2)$$

Тепло, выдѣляемое системой, мы считаемъ отрицательнымъ, почему и поставленъ знакъ — въ выраженіи dQ. Если-же при образованіи $3^{\text{го}}$ газа тепло поглощается, то dQ должно быть положительнымъ; чтобы согласовать нашу формулу съ этимъ требованіемъ, достаточно считать въ этомъ случаѣ L отрицательнымъ. Реакціи, происходящія съ поглощеніемъ тепла, называются эндотермическими, съ выдѣленіемъ тепла - экзотермическими.

Общее выраженіе тепла по $1^{ому}$ закону термодинамики есть:

$$dQ = dU + p.dv.$$

Мы разсматриваемъ химическія реакціи безъ конденсаціи, т.е. безъ измѣненія объема, — поэтому $dv = 0$, и мы получимъ

$$dQ = dU,$$

или-же $\quad dQ = dU = -\mathcal{E}L\,\delta m_3 \quad \cdots\cdots \quad (3)$

отсюда $\quad L = -\frac{1}{\mathcal{E}\,\delta m_3}\,dU \quad \cdots\cdots \quad (4)$

Задача наша теперь состоитъ въ нахожденіи dU.

Мы выше вывели такую формулу для U:

$$U = m_1\left\{\varphi_1 - T\frac{d\varphi_1}{dT}\right\} + m_2\left\{\varphi_2 - T\frac{d\varphi_2}{dT}\right\} + m_3\left\{\varphi_3 - T\frac{d\varphi_3}{dT}\right\} +$$
$$+\mu\left\{f - T\frac{df}{dT}\right\} \cdots\cdots (5)$$

Гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, f$ суть функціи только отъ температуры T.

Чтобы найти выраженіе dU, мы должны варьировать формулу (5) по m_1, m_2, m_3.

$$dU = \delta m_1\left\{\varphi_1 - T\frac{d\varphi_1}{dT}\right\} + \delta m_2\left\{\varphi_2 - T\frac{d\varphi_2}{dT}\right\} + \delta m_3\left\{\varphi_3 - T\frac{d\varphi_3}{dT}\right\}.$$

Мы видѣли, что

$$\delta m_1 = -\frac{n_1\omega_1}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\,\delta m_3 \cdots\cdots (6)$$

$$\delta m_2 = -\frac{n_2\omega_2}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\,\delta m_3 \cdots\cdots (7)$$

гдѣ ω_1 и ω_2 суть молекулярные вѣса. перваго и втораго газа, а n_1 и n_2 — числа молекулъ ихъ, вступающихъ въ соединеніе.

Вставляемъ значенія δm_1 и δm_2 въ выраженіе для dU:

$$dU = \frac{\delta m_3}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\left\{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\left[\varphi_3 - T\frac{d\varphi_3}{dT}\right] - n_1\omega_1\left[\varphi_1 - T\frac{d\varphi_1}{dT}\right] - \right.$$
$$\left. - n_2\omega_2\left[\varphi_2 - T\frac{d\varphi_2}{dT}\right]\right\}.$$

Подставляемъ это значеніе dU въ выраженіе для L (4), — получаемъ, мѣняя порядокъ членовъ въ dU вслѣдствіе перемѣны знака:

$$L = \frac{1}{\mathcal{E}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}\left\{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\left(T\frac{d\varphi_3}{dT} - \varphi_3\right) - n_1\omega_1\left(T\frac{d\varphi_1}{dT} - \varphi_1\right) - \right.$$
$$\left. - n_2\omega_2\left(T\frac{d\varphi_2}{dT} - \varphi_2\right)\right\} \cdots\cdots (8)$$

Это выраженіе показываетъ, что теплота реакціи не зависитъ: 1) отъ присутствія нейтральнаго газа; 2) отъ состава системы и отъ болѣе или менѣе полнаго состоянія диссоціаціи системы въ моментъ реакціи (не зависитъ отъ количествъ m_1, m_2, m_3); 3) отъ объема системы и въ данномъ случаѣ отъ давленія. Зависитъ только отъ температуры.

Опредѣлимъ теперь, какъ измѣняется это тепло $\mathcal{L}$ въ зависимости отъ измѣненія температуры, для чего нужно взять производную отъ послѣдняго выраженія по $\mathcal{T}$. Прежде чѣмъ брать эту производную, замѣтимъ, что

$$\frac{d}{d\mathcal{T}}\left(\mathcal{T}\frac{d\varphi}{d\mathcal{T}}-\varphi\right)=\frac{d\varphi}{d\mathcal{T}}+\mathcal{T}\frac{d^2\varphi}{d\mathcal{T}^2}-\frac{d\varphi}{d\mathcal{T}}=\mathcal{T}\frac{d^2\varphi}{d\mathcal{T}^2}.$$

Поэтому получаемъ:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{T}}\cdot\mathcal{E}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)=(n_1\omega_1+n_2\omega_2)\mathcal{T}\frac{d^2\varphi_3}{d\mathcal{T}^2}-n_1\omega_1\mathcal{T}\frac{d^2\varphi_1}{d\mathcal{T}^2}-n_2\omega_2\mathcal{T}\frac{d^2\varphi_2}{d\mathcal{T}^2}\cdots(a)$$

Выраженіе это можно преобразовать въ очень простую форму. Такъ какъ $\mathcal{F}$ есть свободная энергія или термодинамическій потенціалъ при постоянномъ объемѣ, то — какъ было раньше выведено — теплоемкость при постоянномъ объемѣ $c_v=-\mathcal{T}\frac{d^2\mathcal{F}}{d\mathcal{T}^2}$, причемъ берется она въ единицахъ работы. Въ тепловыхъ единицахъ (калоріяхъ)

$$c_v=-\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{E}}\cdot\frac{d^2\mathcal{F}}{d\mathcal{T}^2}\quad\cdots\cdots\quad(9)$$

Термодинамическій потенціалъ или свободная энергія для газовъ имѣлъ такой видъ:

$$\mathcal{F}=\varphi(\mathcal{T})-\mathcal{T}g\sigma\lg\frac{m}{v}.$$

Составляя вторую производную отъ этого выраженія:

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathcal{T}}=\frac{d\varphi}{d\mathcal{T}}-g\sigma\lg\frac{m}{v}\;;\quad\frac{d^2\mathcal{F}}{d\mathcal{T}^2}=\frac{d^2\varphi}{d\mathcal{T}^2},$$

видимъ, что выраженіе для c_v (9) можемъ переписать:

$$c_v=-\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{E}}\cdot\frac{d^2\varphi}{d\mathcal{T}^2}\quad\cdots\cdots\quad(10)$$

Поэтому предыдущее соотношеніе (a) можемъ теперь представить въ такомъ упрощенномъ видѣ:

$$(n_1\omega_1+n_2\omega_2)\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{T}}=n_1\omega_1c_1+n_2\omega_2c_2-(n_1\omega_1+n_2\omega_2)c_3\cdots\quad(11)$$

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ $\frac{d\mathcal{L}}{d\mathcal{T}}=0$. Это бываетъ въ томъ случаѣ, если для сложнаго и для составляющихъ газовъ существуетъ-же равенство молекулярныхъ теплотъ. Молекулярной теплотой газа называется произведеніе изъ молекулярнаго вѣса на удѣльную теплоту газа при постоянномъ объемѣ. Так. обр. равенство молекулярныхъ теплотъ первыхъ двухъ газовъ можно выразить такъ:

$$\omega_1 c_1 = \omega_2 c_2 .$$

Мы разсматривали выше частный случай, когда одинъ объемъ 1-го газа и одинъ объемъ 2-го даютъ два объема 3-го, или одна молекула 1-го газа ($n_1=1$), соединяясь съ одной молекулой 2-го ($n_2=1$), даетъ двѣ молекулы 3-го; слѣд., молекулярный вѣсъ 3-го газа будетъ:

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2},$$

а молекулярная теплота будетъ:

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,c_3 .$$

Так. обр. равенство молекулярныхъ теплотъ всѣхъ 3-хъ газовъ можемъ выразить такъ:

$$\omega_1 c_1 = \omega_2 c_2 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,c_3 .$$

Полагая теперь въ выраженіи для $\frac{dL}{d\vartheta}$ $n_1=1$, $n_2=1$, находимъ справа

$$\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2 - (\omega_1+\omega_2)\,c_3 ,$$

что по предыдущему соотношенію равно нулю; слѣд., здѣсь

$$\frac{dL}{d\vartheta}=0,$$

т.е. теплота реакціи есть нѣкоторая постоянная, не зависящая отъ температуры.

§72. Рѣшимъ вопросъ, въ какую сторону идетъ химическая реакція при измѣненіи температуры системы, находившейся въ равновѣсіи.

Мы имѣли условіе подвижнаго равновѣсія 3-хъ газовъ, которое писалось въ такомъ видѣ:

$$n_1\omega_1\sigma_1 \lg\frac{m_3}{m_1} + n_2\omega_2\sigma_2 \lg\frac{m_3}{m_2} = \psi(\vartheta) \quad . \ . \ . \ . \quad (12)$$

гдѣ σ - удѣльный объемъ.

Выраженіе $\psi(\vartheta)$ имѣло такой видъ:

$$\psi(\vartheta) = \frac{n_1\omega_1\varphi_1 + n_2\omega_2\varphi_2 - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\varphi_3}{g\vartheta}$$

Наша система при извѣстной ϑ, опредѣляемой ур. (12), находится въ равновѣсіи. Посмотримъ теперь, будутъ-ли при возрастаніи ϑ образоваться новыя количества сложнаго газа, или-же напротивъ — онъ будетъ диссоціироваться.

Рѣшеніе этого вопроса приводитъ къ такъ называемому закону перемѣщенія химическаго равновѣсія.

Чтобы рѣшить, въ какую сторону будетъ идти химическая реакція, нужно рѣшить, будетъ-ли функція $\psi(\vartheta)$ съ увеличеніемъ температуры возрастать или убывать. Если она возрастаетъ, то, какъ видно изъ ур. (12), 1$^{\text{ая}}$ часть его должна тоже возрастать, для чего m_3 должно увеличиваться. Въ этомъ случаѣ будетъ образоваться новое количество 3$^{\text{го}}$ газа. Если-же $\psi(\vartheta)$ убываетъ, то, напротивъ, образовавшееся количество 3$^{\text{го}}$ газа будетъ распадаться. Слѣд., нужно рѣшить, убываетъ-ли или возрастаетъ съ увеличеніемъ температуры $\psi(\vartheta)$, а для этого нужно знать, каковъ знакъ у $\frac{d\psi(\vartheta)}{d\vartheta}$. Продифференцируемъ съ этою цѣлью $\psi(\vartheta)$:

$$g\frac{d\psi}{d\vartheta} = -\frac{1}{\vartheta^2}\left\{n_1\omega_1\varphi_1 + n_2\omega_2\varphi_2 - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\varphi_3\right\} +$$

$$+\frac{1}{\vartheta}\left\{n_1\omega_1\frac{d\varphi_1}{d\vartheta} + n_2\omega_2\frac{d\varphi_2}{d\vartheta} - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\frac{d\varphi_3}{\vartheta}\right\}$$

Беремъ во 2$^{\text{ой}}$ части $\frac{1}{\vartheta^2}$ общимъ множителемъ:

$$\vartheta^2 g\frac{d\psi}{d\vartheta} = -\left\{n_1\omega_1\varphi_1 + n_2\omega_2\varphi_2 - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\varphi_3\right\} +$$

$$+\left\{n_1\omega_1\vartheta\frac{d\varphi_1}{d\vartheta} + n_2\omega_2\vartheta\frac{d\varphi_2}{d\vartheta} - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\vartheta\frac{d\varphi_3}{d\vartheta}\right\}.$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ для L (8), легко видѣть, что вторая часть предыдущаго уравненія = скобкамъ второй части выраженія для L.

Поэтому можемъ написать, что

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = -\frac{LE(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}{\vartheta^2 g} \quad \cdots\cdots (13)$$

Отсюда прямо можно вывести законъ перемѣщенія химическаго равновѣсія.

Если $L=+$, т.е. имѣемъ реакцію съ выдѣленіемъ тепла — реакцію экзотермическую, то $\frac{d\psi}{d\vartheta}=-$ съ возрастаніемъ ϑ, т.е. $d\vartheta=+$, функція $\psi(\vartheta)$ убываетъ, и, какъ было выше сказано, составной 3-ій газъ будетъ распадаться на свои составныя части, на газы 1-ый и 2-ой. Съ убываніемъ температуры ϑ, т.е. $d\vartheta=-$, наоборотъ — масса газа 3-го будетъ увеличиваться на счетъ соединенія простыхъ 1-го и 2-го газа.

Если $L=-$, т.е. реакція происходитъ съ поглощеніемъ тепла — реакція эндотермическая, то $\frac{d\psi}{d\vartheta}=+$ при $d\vartheta=+$, функція $\psi(\vartheta)$ возрастаетъ, — и дѣло будетъ обстоять какъ разъ наоборотъ: съ увеличеніемъ температуры газъ сложный будетъ образовываться изъ составныхъ газовъ, съ уменьшеніемъ ея будетъ распадаться на простѣйшія части.

Вотъ направленія, въ которыя можетъ совершаться химическая реакція съ измѣненіемъ температуры.

Для частнаго случая, разобраннаго нами немного выше, въ которомъ L имѣетъ то свойство, что не измѣняется съ температурой, условіе равновѣсія 3-хъ газовъ можно вмѣсто формулы ( ) выразить, какъ уже знаемъ, такой формулой:

$$\frac{\omega_1\sigma_1}{2}\,lg\,\frac{m_3^2}{m_1 m_2}=\psi(\vartheta)\quad\ldots\ldots\quad(15)$$

Въ форм.(14) σ есть удѣльный объемъ, поэтому $\omega\sigma$ есть молекулярный объемъ, т.е. объемъ одной молекулы. По закону Авогадро объемы молекулъ въ газообразномъ состояніи одинаковы для всѣхъ газовъ, — поэтому $\omega\sigma=Const.=\kappa$. Подставляя въ выраж.(14) вмѣсто $\omega_1\sigma_2$ постоянную величину κ, получимъ:

$$lg\,\frac{m_3^2}{m_1 m_2}=\psi(\vartheta)\cdot\frac{2}{\kappa}\quad\ldots\ldots\quad(16)$$

Обозначимъ постоянную величину $\frac{2LE}{\kappa g}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ черезъ M, а постоянную величину $\frac{2C}{\kappa}$ черезъ N; тогда формулу (16), вставляя въ неё вмѣсто $\varphi(\vartheta)$ (15), можно представить въ такомъ видѣ:

$$\lg \frac{m_3^2}{m_1 m_2} = \frac{M}{\vartheta} + N \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Для частнаго разсматриваемаго нами случая по этой формулѣ можно также прослѣдить, въ какомъ направленіи пойдетъ химическая реакція. Если $L=+$, то $M=+$, и когда температура ϑ измѣняется отъ 0 до ∞, то лѣвая часть соотношенія (17) измѣняется отъ $+\infty$ до N, т.е. для экзотермическихъ реакцій m_3 съ возрастаніемъ ϑ до ∞ все убываетъ, сложный газъ распадается мало-помалу на составныя части. Наоборотъ, если реакція эндотермическая, $L=-$, $M=-$, при измѣненіи ϑ отъ 0 до ∞ lg. 1^ой^ части измѣняется отъ $-\infty$ до $+N$, т.е. m_3 возрастаетъ, - масса сложнаго газа будетъ увеличиваться.

По опытнымъ даннымъ Lemoine'а можно провѣрить формулы равновѣсія ( ) и получимъ результаты съ ней согласные. Опыты касаются смѣси паровъ іода съ водородомъ; 3^ій^ газъ былъ іодистый водородъ, изъ нихъ образующійся: $H_2 + J_2 = 2HJ$.

На основаніи закона перемѣщенія химическаго равновѣсія можемъ дѣлать предположенія о конечномъ составѣ веществъ нашей планеты и другихъ міровъ. Такъ, если въ природѣ преобладаютъ экзотермическіе процессы, то такъ какъ температура земли, планетъ, солнца все понижается, то число сложныхъ тѣлъ должно въ этомъ случаѣ увеличиваться; всѣ простыя тѣла должны будутъ мало-помалу вступать въ соединеніе между собою, число простыхъ элементовъ должно уменьшаться. Напротивъ, если въ природѣ преобладаютъ процессы эндотермическіе, то всѣ сложныя тѣла природы будутъ стремиться къ распаденію, так. обр., число сложныхъ тѣлъ должно уменьшаться, число элементовъ увеличиваться. Повидимому, въ природѣ преобладаютъ большею частью процессы экзотермическіе.

Этимъ мы и закончимъ краткій очеркъ о химическомъ равновѣсіи однородной системы, состоящей изъ $3^{хъ}$ газовъ.

На этомъ очеркѣ можно достаточно прослѣдить тѣ пріемы, которые употребляются въ этомъ случаѣ, тѣ задачи, которыя при этомъ ставятся, и т.д.

XV. Метода и теоремы Gibbs'a.

§73. Укажемъ вкратцѣ на одинъ изъ выдающихся методовъ Термодинамики, предложенный Джибсомъ (Gibbs), который соприкасается тѣснымъ образомъ съ очеркомъ, сейчасъ нами изложеннымъ. Методъ этотъ еще и теперь разрабатывается во всевозможныхъ направленіяхъ. Мы коснемся только его сущности.

Тѣла, сохраняющія свой составъ при реакціяхъ, происходящихъ въ системѣ, слѣд., тѣ, изъ которыхъ составляются различные роды веществъ системы, будемъ называть химическими компонентами системы. Это могутъ быть элементы или-же тѣла, вступающія цѣликомъ въ соединеніе, не распадающіяся больше на простѣйшіе элементы.

Пусть m есть масса какого-нб. химическаго компонента. Компоненты эти могутъ быть въ различныхъ фазахъ: жидкой, твердой, газообразной и т.д. Будемъ обозначать фазу индексомъ i, а родъ компонента индексомъ k, ставя k подъ строкой при буквѣ m, а i надъ строкой. Так. обр., m_k^i обозначаетъ, что взята масса m количества k въ фазѣ i. Пусть i измѣняется отъ 1 до r (r-цѣлое), а k отъ 1 до n (n тоже цѣлое), т.е. система состоитъ изъ r фазъ, въ которыя входятъ n компонентовъ. Мы уже знаемъ, что газообразныхъ фазъ всегда бываетъ только одна, ибо газы между собою смѣшиваются, жидкихъ-же и твердыхъ можетъ быть сколько-угодно. Составимъ сумму всѣхъ компонентовъ, находящихся въ фазѣ i, получимъ $\sum_k m_k^i = m_i$ (масса фазы i). Можно составить сумму массъ опредѣленной во всѣхъ фазахъ системы; тогда получимъ $\sum_i m_k^i = m_k$. Т. к. наша система состоитъ изъ r фазъ, то масса всей системы есть $M = \sum_1^r m_i$.

Если v_i есть удѣльный объемъ фазы i, то весь объемъ будетъ $V = \sum_i m_i v_i$; Пусть ε_i есть энергія $1^{\text{цы}}$ массы фазы i, иначе - удѣльная энергія i-той фазы, тогда полная энергія всей системы будетъ $U = \sum_i m_i \varepsilon_i$. Точно также, если η_i есть удѣльная энтропія i-той фазы, то $S = \sum_i m_i \eta_i$ есть энтропія всей ~~массы~~ системы.

Знакъ $\sum_i$ означаетъ, что суммированіе должно произвести по i отъ 1 до r. Точно также $\sum_k$ означаетъ суммированіе по k отъ 1 до n.

При увеличеніи массъ всѣхъ компонентовъ въ одно и то-же число разъ во столько-же увеличится объемъ, энергія и энтропія системы. Поэтому V, U, S всей системы должны быть однородными функціями $1^{\text{ой}}$ степени отъ массъ компонентовъ, т. е.

$$\left.\begin{aligned} V &= \sum_k \sum_i v_k^i m_k^i \\ U &= \sum_k \sum_i \varepsilon_k^i m_k^i \\ S &= \sum_k \sum_i \eta_k^i m_k^i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ уже $v_k^i, \varepsilon_k^i, \eta_k^i$ имѣютъ значеніе коэффиціентовъ въ однородныхъ функціяхъ $1^{\text{ой}}$ степени U, V, S, а не физическій смыслъ удѣльныхъ объемовъ, энергій и энтропій, какъ было опредѣлено выше.

Возьмемъ выраженіе термодинамическаго потенціала H при независимыхъ перемѣнныхъ p и T; оно писалось такъ:

$$H = U - TS + pv.$$

Если подставить сюда вышенаписанныя значенія U, V и S, то увидимъ, что и H будетъ однородной функціей $1^{\text{ой}}$ степени отъ компонентовъ, т. е.

$$H = \sum h_k^i m_k^i \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ h_k^i можетъ зависѣть отъ температуры и давленія.
Извѣстно, что въ самопроизвольныхъ процессахъ ходъ ихъ совершается при убываніи потенціала, т.е. условіе самопроизвольнаго процесса будетъ: $\delta H < 0$. Равновѣсіе-же подвижное наступаетъ при $\delta H = 0$.

Если дана однородная функція m-ой степени: $U = f(x, y, z)$, то - какъ извѣстно изъ анализа - по теоремѣ Фонтена (Эйлера) её можно представить въ такомъ видѣ:

$$mU = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz}.$$

Принимая это во вниманіе, можемъ выраженіе для H представить въ такомъ видѣ (т.к. $m = 1$):

$$H = \sum \frac{dH}{dm_k^i} m_k^i \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Сравнивая это выраженіе H съ раньше написаннымъ (2), заключаемъ, что

$$h_k^i = \frac{dH}{dm_k^i} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Коэффиціентъ h_k^i Джиббсъ называетъ потенціаломъ какого-нб. компонента k, находящагося въ фазѣ i. Этотъ потенціалъ = производной отъ термодинамическаго потенціала по массѣ компонента въ данной фазѣ.

Варьируемъ H: $\delta H = \frac{dH}{dm_1^i}\delta m_1^i + \frac{dH}{dm_2^i}\delta m_2^i + \ldots + \frac{dH}{dm_k^i}\delta m_k^i + \ldots$

Слѣд.,

$$\delta H = \sum_i \sum_k \frac{dH}{dm_k^i}\delta m_k^i.$$

Вставляя (4), получимъ:

$$\delta H = \sum_i \sum_k h_k^i \delta m_k^i = 0 \text{ (въ случаѣ равновѣсія)} \ldots (5)$$

Т. к. масса утеряться не можетъ, то должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$\sum_i m_k^i = m_k = Const. \text{ для } k = 1, 2 \ldots\ldots n.$$

Отсюда:

$$\sum_i \delta m_k^i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Такихъ уравненій можно составить столько, сколько въ системѣ будетъ компонентовъ, т.е. n.

Так. обр. изъ числа варіацій, входящихъ въ ур.(5) не всѣ будутъ произвольны; часть ихъ связывается уравненіями вида (6). Исключимъ эти варіаціи изъ ур.(5), пользуясь методомъ неопредѣленныхъ множителей. Умножимъ ур.(6) на множителя h_k и вычтемъ изъ ур.(5), считая k мѣняющимися, равно какъ и i, тогда имѣемъ:

$$\sum_i \sum_k \left(h_k^i - h_k\right) \delta m_k^i = 0.$$

Въ этихъ выраженiяхъ всѣ δm_k^i уже независимы другъ отъ друга, — слѣд., произвольны. Поэтому $\delta m_k^i \neq 0$, а слѣд. должно быть, чтобы

$$h_k^i - h_k = 0 \quad , \text{ т.е. } \quad h_k^i = h_k \quad \dots\dots (7)$$

Въ этомъ послѣднемъ уравненiи k неизмѣнно, а i мѣняется отъ 1 до ν. Равенство (7) можно представить нагляднѣе такъ:

$$h_k^1 = h_k^2 = h_k^3 = \dots = h_k^i = \dots = h_k^\nu = h_k = Const. \text{ для } k = 1, 2, \dots n. \quad (8)$$

или болѣе явно:

$$h_1^1 = h_1^2 = \dots = h_1^\nu = h_1 ; \; h_2^1 = h_2^2 = \dots = h_2^\nu = h_2 ; \; \dots \; h_n^1 = h_n^2 = \dots h_n^\nu = h_n \; \dots (8')$$

Отсюда выводимъ такое заключенiе: равновѣсiе одного какого-нб. компонента въ различныхъ его фазахъ возможно тогда только, если потенцiалы всѣхъ фазъ одинаковы. (Съ такимъ равенствомъ потенцiаловъ (всевозможныхъ) намъ приходится встрѣчаться уже неразъ.) Это-выраженiе $1^{\text{го}}$ закона Gibbs'а. Уравненiй вида (8) у насъ будетъ числомъ $(\nu-1)$ для каждаго изъ компонентовъ. Т.к. всѣхъ компонентовъ у насъ въ системѣ n, то всѣхъ уравненiй будетъ $n(\nu-1)$. Къ нимъ нужно присоединить еще извѣстныя уравненiя, характеризующiя состоянiя фазъ; ихъ будетъ числомъ ν, ибо по условiю фазъ у насъ ν. Итакъ, всѣхъ уравненiй, связывающихъ неизвѣстныя величины, можно составить числомъ $\nu + n(\nu-1)$. Сосчитаемъ теперь, сколько неизвѣстныхъ въ этихъ ур. Неизвѣстны массы компонентовъ, каждый изъ нихъ находится въ фазѣ i; всѣхъ фазъ ν; слѣд., неизвѣстно ν частей массы каждаго компонента, находящихся въ соотвѣтственныхъ фазахъ. Т.к. компонентовъ n, то всего неизвѣстныхъ $n\nu$. Присоединяя сюда 2 общихъ для всѣхъ фазъ неизвѣстныхъ - температуру и давленiе, находимъ, что всего неизвѣстныхъ можетъ быть въ предыдущихъ уравненiяхъ $n\nu + 2$.

Для возможности задачи необходимо, чтобы

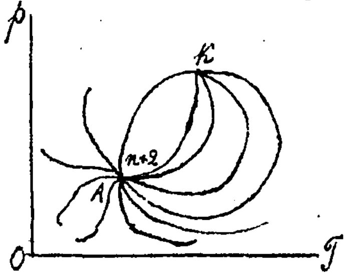
$\nu+(\nu-1)n \leqq n\nu+2$, или-же $\nu \leqq n+2$ . . . . (9).

Другими словами при равновѣсіи число фазъ системы должно быть меньше или равно числу компонентовъ, увеличенныхъ двумя. Наибольшее число фазъ, могущихъ существовать въ равновѣсіи, опредѣляется, слѣд., соотношеніемъ:

$$\nu = n+2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Соотношеніе это выражаетъ собою 2ой знаменитый законъ Gibbs'а (правило фазъ Gibbs'а). Законъ этотъ мы и раньше немного подтвердили. Въ самомъ дѣлѣ, если взять 1 компонентъ — воду H_2O, то $n=1$, и число фазъ, могущихъ находиться въ равновѣсіи, число, опредѣляемое ур. (10), для этого случая = 3. И дѣйствительно, вода — какъ мы видѣли — можетъ существовать заразъ въ 3хъ фазахъ — твердомъ, жидкомъ и газообразномъ, при чемъ всѣ три фазы будутъ въ подвижномъ равновѣсіи. Ур. (10) можетъ также указывать намъ, вполнѣ-ли изучены нами свойства какой-нб. системы. Положимъ, напр., что намъ извѣстны 4 фазы, въ которыхъ можетъ находиться система изъ 8 компонентовъ. Т. к. maximum фазъ, могущихъ находиться въ равновѣсіи въ этомъ случаѣ есть 10, то мы можемъ искать еще 6 неизвѣстныхъ фазъ для нашей системы.

Когда $\nu = n+2$, то число уравненій = въ точности числу неизвѣстныхъ; для каждаго изъ неизвѣстныхъ въ этомъ случаѣ получается единственное, вполнѣ опредѣленное значеніе. Возьмемъ діаграмму (p, T); тогда на ней состояніе равновѣсія системы выразится одной точкой A, имѣющей соотвѣтственныя p и T, получаемыя изъ данныхъ уравненій. Эта точка называется $(n+2)$ой точкой данной системы (многофазной точкой). Такъ при $n=1$ (H_2O) мы имѣемъ тройную точку льда, жидкости и пара; это — какъ мы видѣли — такая точка, при p и T которой возможно одновременное существованіе



всѣхъ этихъ фазъ. Такой болѣе общій смыслъ имѣетъ и точка А.

Пусть въ нашей системѣ отсутствуетъ какая-нб. изъ $(n+2)$ фазъ, т.е. $\nu=n+1$. Тогда число уравненій $\nu+n(\nu-1)$ будетъ $n+1+n^2$, а число неизвѣстныхъ $n\nu+2$ будетъ n^2+n+2, т.е. число уравненій однимъ меньше числа неизвѣстныхъ; одно изъ неизвѣстныхъ можетъ быть задаваемо въ этомъ случаѣ произвольно, и тогда др.-гія вполнѣ опредѣляются изъ указанныхъ уравненій. Пусть произвольнымъ перемѣннымъ будетъ T, изъ остальныхъ уравненій для каждаго T найдется соотвѣтственное давленіе p. На чертежѣ мы получимъ геометрическое мѣсто концовъ всѣхъ ординатъ p при произвольно, но непрерывно задаваемыхъ T, — другими словами, получимъ кривую, представляющую зависимость между p и T; для паръ значеній p и T, опредѣляющихъ ея точки, возможно равновѣсіе $n+1$ фазы. Напр. когда число фазъ есть 3 (ледъ, вода, паръ), то изъ тройной точки идутъ кривыя равновѣсія $2^{\text{хъ}}$ фазъ: льда-воды, воды-пара, пара-льда. Выкидывая затѣмъ изъ числа фазъ $n+2$ какую-нб. другую фазу, получимъ такимъ-же способомъ новую кривую для равновѣсія остающихся фазъ; и такъ можно поступать, пока не исчерпаемъ всѣ $n+2$ фазы. Нетрудно сообразить, что число всѣхъ кривыхъ будетъ $n+2$, ибо $\nu=n+2$. Всѣ эти кривыя должны проходить черезъ $(n+2)$-фазную точку, ибо въ ней находятся въ равновѣсіи любыя $n+1$ фазъ при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи выкинутой фазы.

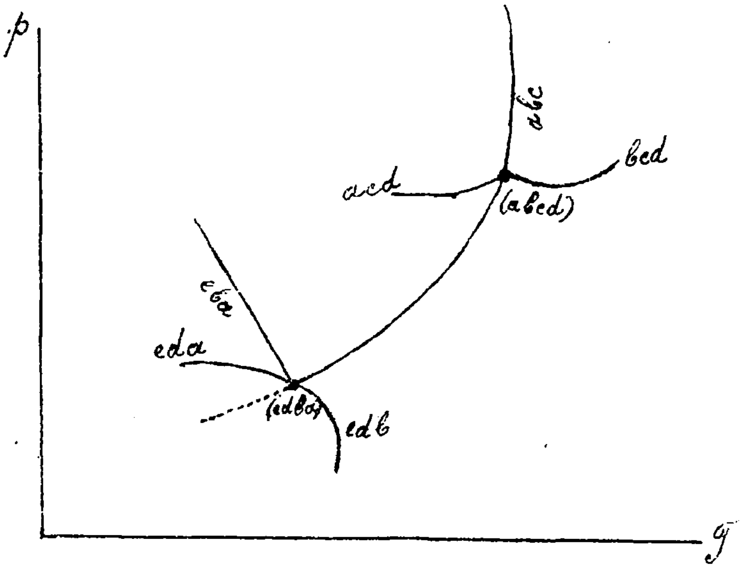
Если число фазъ, возможныхъ для компонентовъ, больше $n+2$, то тогда будемъ имѣть нѣсколько $(n+2)$-фазныхъ точекъ. Кривыя, изъ нихъ исходящія, идутъ или отъ ~~одной~~ многофазной точки къ другой, или простираются въ ∞. Экспериментальное изслѣдованіе такихъ случаевъ мы находимъ въ работахъ Backuïs Rozeboom'а.

Какъ примѣръ, можемъ указать равновѣсіе системы, состоящей изъ $2^{\text{хъ}}$ компонентовъ: двуокиси сѣры (SO_2) и воды (H_2O). Слѣдовательно, въ особыхъ точкахъ могутъ существовать въ равновѣсіи maximum 4 фазы; на кривыхъ, изъ нихъ исходящихъ, будутъ существовать по 3 фазы.

Для системы возможны 5 фазъ:

1) Твердый гидратъ $SO_2 7H_2O$ . . . . a
2) Растворъ SO_2 въ H_2O . . . . b
3) Растворъ H_2O въ SO_2 c
4) Смѣсь сѣрнистаго газа SO_2 съ парами воды . . . d
5) Ледъ, т.е. H_2O твердая . . . . e

Для плоскости (p, ϑ) условія равновѣсія представятся слѣдующей діаграммой съ 2-мя четырехфазными точками:



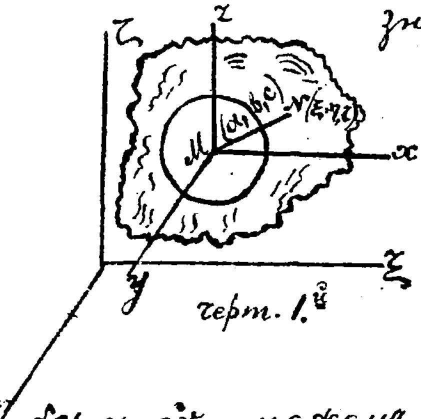
I. Предварительныя понятія.

Прежде чѣмъ заняться изложеніемъ собственно теоріи свѣта, намъ нужно будетъ познакомиться съ теоріей малыхъ деформацій, которыя могутъ испытывать различныя измѣняемыя системы. При изученіи этого отдѣла могутъ быть преслѣдуемы двѣ задачи: вопервыхъ мы можемъ разсматривать тѣ перемѣщенія, которыя испытываютъ различныя точки изслѣдуемой среды, и вовторыхъ, разсматривать причины, производящія эти перемѣщенія, другими словами, силы, дѣйствующія при этомъ. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть дѣло съ кинематической и динамической стороною вопроса. Къ изложенію первой мы и приступимъ.

Здѣсь нужно будетъ обратить вниманіе на свойства движенія твердаго тѣла. Извѣстно изъ отдѣла кинематики аналитической механики, что всякое безконечно малое движеніе твердаго тѣла можно разсматривать состоящимъ геометрически изъ трехъ безконечно малыхъ поступательныхъ перемѣщеній параллельно неподвижнымъ осямъ координатъ и изъ трехъ безконечно ма-

Литогр. общ. распр. полезн. книгъ.

лыхъ вращеній вокругъ линій параллельныхъ тѣмъ же осямъ. Пусть у насъ имѣется какая-нибудь точка M разсматриваемаго тѣла и неподвижныя прямоугольныя оси координатъ $(\xi\eta\zeta)$. Вообразимъ въ M подвижныя оси координатъ (xyz) съ направленіями, параллельными прежнимъ. Координаты другой любой точки тѣла N относительно неподвижныхъ осей обозначаемъ черезъ ξ, η и ζ, подвижныхъ черезъ x, y, z, координаты точки M черезъ a, b, c. Тогда по формулѣ, взятой изъ кинематики, если угловыя перемѣщенія тѣла около x, y, z суть $\delta\lambda$, $\delta\mu$ и $\delta\nu$, можемъ написать, что для какой-нибудь точки N измѣненія координатъ будутъ таковы:



черт. 1.

$$\left.\begin{aligned}\delta\xi &= \delta a + z\delta\mu - y\delta\nu\\ \delta\eta &= \delta b + x\delta\nu - z\delta\lambda\\ \delta\zeta &= \delta c + y\delta\lambda - x\delta\mu\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad I.$$

Вообразимъ около точки M сферу какого-нибудь малаго радіуса. Будемъ предполагать, что она заполнена сплошь тѣломъ, то есть, если въ ней и существуютъ полости, то и ихъ точки будемъ считать перемѣщающимися также по закону (I). Другими словами, эти полости будемъ мысленно заполнять матеріей того же тѣла, только массу ея будемъ считать равной нулю. Составимъ выраженіе $\int(y\delta\zeta -$

$-z\delta\eta)\,d\omega$, гдѣ $d\omega$ есть элементъ объема нашей сферы, и распространимъ этотъ интегралъ на всю нашу сферу. Вставляя значенія $\delta\zeta$ и $\delta\eta$ въ написанный интегралъ, получимъ:

$$\int(y\delta\zeta - z\delta\eta)\,\delta\omega = \delta c\int y\,\delta\omega + \delta\lambda\int y^2\delta\omega - \delta\mu\int xy\,\delta\omega - \delta\nu\int z\,\delta\omega - \delta r\int zx\,d\omega + \delta\lambda\int z^2\,d\omega\,.$$

Такъ какъ входящіе здѣсь интегралы распространяются на объемъ взятой нами сферы, а въ ней ко всякой точкѣ $+x, +y, +z$ всегда подыщется другая $-x, -y, -z$ и т. д., то значеніямъ подъинтегральныхъ функцій $y\,d\omega$, $z\,d\omega$, $xy\,d\omega$, $xz\,d\omega$ будутъ соотвѣтствовать точки, для которыхъ эти подъинтегральныя функціи будутъ имѣть величины $-y\,d\omega$, $-z\,d\omega$, $-xy\,d\omega$, $-xz\,d\omega$.

Поэтому всѣ интегралы, содержащіе подъ знакомъ нечетныя степени координатъ, исчезнутъ, такъ какъ будутъ состоять изъ членовъ, попарно уничтожающихся. Останутся только интегралы, содержащіе квадраты перемѣнныхъ координатъ, т. е. наше выраженіе представится такъ:

$$\int(y\delta\zeta - z\delta\eta)\,d\omega = \delta\lambda\int y^2\,d\omega + \delta\lambda\int z^2\,d\omega \ldots \underline{II}.$$

Легко можно вывести, что члены правой части уравненія (II) другъ другу равны (y и z суть координаты точекъ сферы), но мы этого условія во вниманіе принимать пока не будемъ. Опредѣлимъ изъ II:

$$\delta\lambda = \frac{\int(y\delta\zeta - z\delta\eta)\,d\omega}{\int(y^2+z^2)\,d\omega} \cdots (3a).$$

Точно также найдемъ, что:

$$\delta\mu = \frac{\int(z\delta\xi - x\delta\zeta)\,d\omega}{\int(x^2+z^2)\,d\omega} \cdots (3b).$$

и

$$\delta\nu = \frac{\int(x\delta\eta - y\delta\xi)\,d\omega}{\int(y^2+x^2)\,d\omega} \cdots (3c).$$

Такъ могутъ быть опредѣлены *угловыя перемѣщенія точекъ неизмѣняемой системы или твердаго тѣла*. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію перемѣщеній, которыя можетъ испытывать измѣняемая система. Мы предположимъ, что она непрерывно наполняетъ нѣкоторый объемъ. Будемъ перемѣщенія, какъ и раньше, относить къ двумъ параллельнымъ между собою системамъ прямоугольныхъ координатъ, расположеннымъ такъ же, какъ и раньше. Пусть въ системѣ произошли измѣненія въ расположеніи частицъ; эти измѣненія будутъ функціями ихъ начальныхъ положеній и времени. Будемъ считать эти функціи непрерывно измѣняющимися какъ съ временемъ такъ и при переходѣ изъ одной точки къ другой т. е. при непрерывномъ измѣненіи координатъ опредѣляющихъ начальныя положенія точекъ системы. Этимъ допущеніемъ мы исключаемъ прежде всего возможность встрѣчи въ одной точкѣ пространства двухъ элементарныхъ массъ, (ибо если функціи прерывны, то можетъ случиться, что для одного и того же времени они для двухъ различныхъ точекъ системы укажутъ одно и то же положеніе въ пространствѣ), а затѣмъ возможность образованія разрыва, полости и т. д.

Пусть точка M, въ которой помѣщено начало подвижныхъ координатъ, вслѣдствіе этого измѣненія получитъ перемѣщенія u, v и w по направленію неподвижныхъ осей координатъ, пусть другая какая-нибудь точка $N(x, y, z)$ совершила перемѣщенія такого же характера – u_1, v_1 и w_1. Если назовемъ относительными(м) координаты точки N въ новомъ положеніи черезъ x', y' и z', то очевидно будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+u_1 \\ y' &= y+v_1 \\ z' &= z+w_1 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V).$$

Таковы будутъ координаты точки N относительно первоначальнаго положенія точки M; по отношенію же къ перемѣщенному положенію точки M координаты новаго положенія точки N будутъ:

$$x'' = x+u_1-u;\quad y'' = y+v_1-v;$$
$$z'' = z+w_1-w \;\ldots\ldots (V^2)$$

(м) т. е. отнесенныя къ подвижнымъ осямъ координатъ, начало коихъ въ M.

Эти замѣчанія пока намъ нужны не будутъ, приводимъ же ихъ для того, чтобы можно было яснѣе составить себѣ понятіе о совершающихся перемѣщеніяхъ въ измѣняемой системѣ.

Разсмотримъ часть Ω всего объема, который занимаетъ наша система. Пусть точка M лежитъ внутри Ω. Такъ какъ мы условились перемѣщенія считать непрерывными, то u_1, v_1 и w_1 можно выразить черезъ u, v и w по строкѣ Тейлора:

$$u_1 = u + \frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}x^2 + \frac{d^2u}{dxdy}xy + \dots\dots$$

$$v_1 = v + \frac{dv}{dx}x + \frac{dv}{dy}y + \frac{dv}{dz} + \frac{1}{2}\dots\dots\dots$$

$$W_1 = w + \frac{dw}{dx}x + \frac{dw}{dy}y + \frac{dw}{dz}z + \frac{1}{2}\dots\dots\dots\dots \text{(VI)},$$

гдѣ $u, v, w, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \dots$ отнесены къ точкѣ M и потому разсматриваются въ объемѣ Ω какъ постоянныя. Въ этихъ разложеніяхъ мы можемъ ограничиваться тѣмъ или другимъ количествомъ членовъ, смотря потому, какой величины взятъ у насъ объемъ Ω. Найдемъ теперь величину средняго перемѣщенія частицъ объема Ω. Оно будетъ равно суммѣ отдѣльныхъ перемѣщеній каждой частицы, дѣленной на объемъ всѣхъ частицъ. Другими словами, среднія перемѣщенія выразятся такимъ интегральнымъ выраженіемъ:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\int u_1 d\omega}{\Omega} = \frac{\int u_1 d\omega}{\int d\omega}\\ \bar{v} &= \frac{\int v_1 d\omega}{\Omega} = \frac{\int v_1 d\omega}{\int d\omega}\\ \bar{W} &= \frac{\int w_1 d\omega}{\Omega} = \frac{\int w_1 d\omega}{\int d\omega}\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VII})$$

Будемъ изыскивать величины этихъ среднихъ перемѣщеній для объема Ω совершенно опредѣленнаго вида. Примемъ за Ω сферу описанную около точки M нѣкоторымъ радіусомъ и притомъ такимъ, чтобы сфера лежала внутри нашей системы. Подставимъ въ (VI) уравненія выраженія u_1, v_1 и w_1, взятыя изъ (V); при этомъ, какъ указано выше, величины $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ и т. д. для объема внутри сферы постоянны, и потому онѣ выйдутъ изъ подъ знака интеграловъ и отъ послѣднихъ останутся члены вида $\int x d\omega \ldots \int x^n y^m d\omega \ldots$ Такъ какъ эти интегралы берутся по объему сферы, то по той же причинѣ, что и въ уравненіяхъ (II) всѣ интегралы съ нечетными степенями координатъ, стоящихъ подъ знакомъ интеграловъ, должны пропасть, и мы получимъ для среднихъ перемѣщеній выраженія:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u} &= u + \tfrac{1}{2}\int x^2 d\omega . \Delta u + k\Delta\Delta u + \ldots\ldots\\ \bar{v} &= v + \tfrac{1}{2}\int y^2 d\omega . \Delta v + k\Delta\Delta v + \ldots\ldots\\ \bar{W} &= w + \tfrac{1}{2}\int z^2 d\omega . \Delta w + k\Delta\Delta w + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} (\text{VIII})$$

Символъ Δ обозначаетъ сумму вторыхъ производныхъ отъ какой нибудь функціи по координатамъ, входящимъ въ нее, т.е.:

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2};$$

$$\Delta v = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2};$$

$$\Delta w = \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}.$$

Такимъ образомъ формулы (VIII) опредѣляютъ величину среднихъ значеній поступательныхъ перемѣщеній для. частицъ, внутри сферы находящихся.

Найдемъ теперь величину среднихъ вращеній того же сферическаго объема. Выраженія ихъ будутъ таковы, по замѣнѣ перемѣщеній $\delta\xi$, $\delta\zeta$ и $\delta\eta$ въ формулахъ (III) перемѣщеніями u_1, v_1, w_1:

$$\delta\bar{J} = \frac{\int (yw_1 - zv_1)\,d\omega}{\int (y^2+z^2)\,d\omega}$$

$$\delta\bar{\Psi} = \frac{\int (zu_1 - xw_1)\,d\omega}{\int (x^2+z^2)\,d\omega}$$

$$\delta\bar{F} = \frac{\int (xv_1 - yu_1)\,d\omega}{\int (x^2+y^2)\,d\omega}$$

Вставимъ сюда выраженія u_1, v_1, w_1 изъ уравненій (VI). Тогда, сокращая члены, послѣ подстановки, съ нечетными степенями координатъ x, y, z, получимъ какъ и въ предыдущемъ случаѣ:

$$\delta\bar{J} = \frac{dw}{dy}\frac{\int y^2 d\omega}{\int (y^2+z^2)d\omega} + k_1\left(\Delta \frac{dw}{dy}\right) - \frac{dv}{dz}\frac{\int z^2 d\omega}{\int (y^2+z^2)d\omega} + \ldots\ldots$$

Такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ объемомъ сферы, непрерывно наполненной матеріальными частицами системы, что $\int y^2 d\omega = \int z^2 d\omega$. Въ силу этого замѣчанія предыдущее выраженіе $\delta\bar{\xi}$ перепишется такъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta\bar{\xi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) + A \\ \delta\bar{\varphi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) + B \\ \delta\bar{\psi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) + C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (\underline{IX})$$

A, B и C содержатъ члены высшаго порядка относительно производныхъ вида $\frac{du}{dx}$.

Такимъ образомъ найдены и среднія значенія вращеній около осей параллельныхъ неподвижнымъ осямъ координатъ для частицъ, выдѣленныхъ нами въ объемъ сферы. Зная среднія поступательныя движенія и среднія вращенія, и относя ихъ къ точкамъ объема Ω произвольнаго вида, мы можемъ опредѣлить среднее измѣненіе положеній точекъ системы. Это измѣненіе въ положеніи точекъ произвольнаго объема Ω произошло бы въ томъ случаѣ, если бы онъ представлялъ собою твердое тѣло, движеніе котораго опредѣлялось бы найденными выше средними значеніями. Если мы изъ дѣйствительныхъ перемѣщеній точекъ объема Ω вычтемъ перемѣщенія вычисленныя въ предположеніи неизмѣняемости этого объема, то получимъ части, характеризующія относительное измѣненіе въ положеніи точекъ системы, т. е. характеризующія ея деформацію. Составимъ поэтому разности вида: $u_1 - \delta\xi$ и обозначимъ ихъ черезъ u', v', w'. Величины u', v' и w' характеризуютъ деформацію, происшедшую въ нашей системѣ.

Итакъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u_1 - \delta\xi \\ v' &= v_1 - \delta\eta \\ w' &= w_1 - \delta\zeta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (X).$$

Чтобы найти выраженіе деформаціи элементарнаго объема, мы должны вычислить выше написанныя выраженія, а для этого нужно вычислить выраженія $\delta\xi$, $\delta\eta$ и $\delta\zeta$. Но они будутъ вообще очень сложны и для нашихъ цѣлей не необходимы. Они могутъ быть нужны только для выясненія деталей особыхъ явленій. Поэтому мы остановимся на томъ случаѣ, когда объемъ Ω весьма малъ, и когда, слѣдовательно, мы можемъ пренебречь членами второй и высшихъ степеней x, y и z. Поэтому вставляя въ выраженія (I) для $\delta\xi$, $\delta\eta$ и $\delta\zeta$ — вмѣсто $\delta\bar{\pi}$, $\delta\bar{q}$ и $\delta\bar{r}$ ихъ выраженія изъ формулъ (IX) (причемъ членами A, B и C пренебрегаемъ), будемъ имѣть

$$\delta\xi = u + z\,\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) - y\,\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dy}\right).$$

Здѣсь $\bar{u}$ мы замѣнили черезъ u, отбросивъ опять члены высшаго порядка въ выраженіяхъ (VIII). Подставляя это выраженіе $\delta\xi$ и выраженіе u_1 изъ формулы (VI) въ выраженія (X), имѣемъ:

$$u' = u + \frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z - u - z\,\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) +$$

$$+ y\,\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right),$$ а послѣ приведенія:

$$u' = \frac{du}{dx}x + \frac{y}{2}\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right).$$

Аналогично $v' = \frac{dv}{dy}y + \frac{z}{2}\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)+\frac{x}{2}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)$

$$w' = \frac{dv}{dz}z + \frac{x}{2}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+\frac{y}{2}\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right).$$

Для нашего безконечно-малаго объема коэффиціенты въ выраженіяхъ u', v' и w' при x, y, z постоянны и зависимость ихъ отъ x, y, z есть линейная, такая деформація, по причинамъ, которыя объяснены будутъ далѣе, называется <u>однородной</u>; она, какъ видимъ, опредѣляется шестью коэффиціентами. Примемъ слѣдующія обозначенія: $\partial_1 = \frac{du}{dx}$; $\partial_2 = \frac{dv}{dy}$, $\partial_3 = \frac{dw}{dz}$;

$$g_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right);\; g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right);$$

$$g_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right).$$

Замѣчаемъ, что въ g_1 не входитъ ни x, ни u, въ g_2 — ни y, ни v, въ g_3 — ни z, ни w.
Выраженія деформаціи представляются такъ:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \partial_1 x + g_3 y + g_2 z,\\ v' &= \partial_2 y + g_1 z + g_3 x\\ w' &= \partial_3 z + g_2 x + g_1 y, \end{aligned}\right\} \dots\dots \qquad (\underline{XI})$$

Составимъ $\frac{du'}{dy}$ и $\frac{dv'}{dx}$. Легко видѣть, что $\frac{du'}{dz}=\frac{dw'}{dx}$; $\frac{dv'}{dz}=\frac{dw'}{dy}$; $\frac{du'}{dy}=\frac{dv'}{dx}$ — (это частныя производныя).
Въ самомъ дѣлѣ $\frac{du'}{dz}=g_2$; $\frac{dw'}{dx}=g_2$; $\frac{dv'}{dz}=g_1$;

$$\frac{dw'}{dy}=g_1;\; \frac{du'}{dy}=g_3;\; \frac{dv'}{dx}=g_3.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что наши ф-іи

u', v' и w' суть производныя отъ одной и той же ф-iи F. Такъ что, $u'=\frac{dF}{dx}$; $v'=\frac{dF}{dy}$; $w'=\frac{dF}{dz}$. Отсюда имѣемъ:

$$dF=\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=$$

$$=u'dx+v'dy+w'dz,$$ или замѣняя u', v' и w' ихъ выраженiями изъ (XI), получимъ: $dF=\partial_1 x dx+\partial_2 y dy+\partial_3 z dz+g_3(ydx+xdy)+$

$$+g_2(zdx+xdz)+g_1(zdy+ydz).$$

Это выраженiе есть полный дифференцiалъ. Послѣ интеграцiи получимъ:

$$F=\frac{1}{2}(\partial_1 x^2+\partial_2 y^2+\partial_3 z^2+2g_1 yz+2g_2 xz+2g_3 xy) \dots \text{(XII)}$$

Наши перемѣщенiя u', v' и w' суть производныя отъ этой ф-iи F и представляютъ изъ себя проэкцiи на оси координатъ нѣкотораго перемѣщенiя:

$s=\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}$; Cs-ы угловъ, дѣлаемыхъ этимъ перемѣщенiемъ съ осями координатъ, суть:

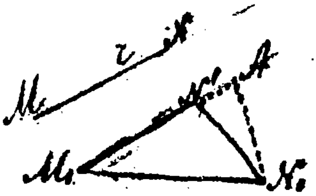
$$Cs(sx)=\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}=\frac{dF}{dx}:\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

$$Cs(sy)=\frac{v'}{\sqrt{\text{id.}}}=\frac{dF}{dy}:\sqrt{\text{id.}};$$

$$Cs(sz)=\frac{w'}{\sqrt{\text{id.}}}=\frac{dF}{dz}:\sqrt{\text{id.}}$$

A это суть Cs-ы угловъ нормали къ поверхности $2F=Const$ съ осями координатъ. Слѣдовательно, вызванное деформацiей перемѣщенiе какой нибудь точки N происходитъ по нормали къ подобной поверхности, проведенной черезъ точку N.

Это поверхность второго порядка, притомъ центральная, такъ какъ ея уравненіе удовлетворяется какъ положительными значеніями координатъ, $(+x,+y,+z)$, такъ и отрицательными, $(-x,-y,-z)$. Нормаль къ поверхности 2^го порядка только въ исключительныхъ точкахъ совпадаетъ съ радіусомъ векторомъ, поэтому перемѣщеніе точки не будетъ имѣть вообще направленія радіуса вектора указанной поверхности. Чтобы яснѣе представить себѣ деформацію, поступимъ такъ: Найдемъ проэкцію перемѣщенія s на направленіе линіи r, соединяющей точки M и N. Послѣ измѣненія, которое претерпѣлъ нашъ объемъ, линія MN перемѣстится въ положеніе M_1N_1. Проводимъ черезъ точку M_1 линію M_1N_1', параллельную MN и откладываемъ на ней длину $M_1N_1 = r$. Соединяемъ точки N_1 и N_1'. Проектируемъ перемѣщеніе s, происходящее отъ деформаціи, на направленіе r (косинусы угловъ линіи r съ осями суть $\frac{x}{r}$, y/r, z/r). По предыдущему эта проэкція выразится такъ:



$$s\cos(rs) = u'\,x/r + v'\,y/r + w'\,z/r = \partial F/\partial x\, x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z)\frac{1}{r}\ldots$$

Такъ какъ ф-ія $2F$ однородная, то по извѣстной теоремѣ диф. исчисл. „сумма первыхъ частныхъ произв. однородной ф-ціи, умноженныхъ на соотвѣт. перемѣнныя = начальной, умноженной на степень ея однородности," проэкцію можно выразить такимъ образомъ: $s\cos(rs) = 2F/r$. Выразимъ ее иначе. Пусть координаты точекъ M и N до деформаціи были $(0, 0, 0)$ и (x, y, z), а послѣ деформаціи — $M_1(u, v, w)$ и $N_1(x+u_1, y+v_1, z+w_1)$. Такъ какъ $M_1N_1' \# MN$, то координаты точки N_1' суть: $(x+u, y+v, z+w)$. Составимъ разности координатъ точекъ N_1 и N_1'. По предыдущему (I) онѣ выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u &= u' + z\delta\mu - y\delta\nu \\ v' - v &= v' + x\delta\nu - z\delta\lambda \\ w_1 - w &= w' + y\delta\lambda - x\delta\mu \end{aligned}\right\}$$

Проэктируя N_1N_1' на направленіе r, получаемъ: $(u_1-u)x/r+(v_1-v)y/r+(w_1-w)z/r$. Подставляя сюда предыдущія выраженія, мы видимъ, что члены, содержащіе вращенія, взаимно уничтожаются и мы получимъ, что

$$(u_1-u)\frac{x}{r}+(v_1-v)\frac{y}{r}+(w_1-w)\frac{z}{r}=\frac{u'x+v'y+w'z}{r}=\frac{2F}{r}.$$

Отсюда заключаемъ, что проэкція перемѣщенія s на направленіе линіи r равна AN_1'. При деформаціи весьма малой эта линія имѣетъ особое значеніе. Именно въ этомъ случаѣ уголъ между прежнимъ и новымъ положеніемъ линіи r, т. е. уголъ AM_1N_1 малъ. Поэтому перпендикуляръ AN_1 можно разсматривать какъ дугу круга съ центромъ M_1 и $AM_1 = N_1M_1 = r'$ т. е. новой длинѣ линіи r. Тогда $AN_1' = r'-r$ есть удлиненіе линіи r послѣ деформаціи. Въ послѣдующемъ намъ важна деформація весьма малая, поэтому укажемъ одно изъ существенныхъ ея свойствъ.

Величина перемѣщенія точки отъ деформаціи выражалась такъ:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \partial_1 x + g_3 y + g_2 z \\ v' &= g_3 x + \partial_2 y + g_1 z \\ w' &= g_2 x + g_1 y + \partial_3 z \end{aligned}\right\}$$

Координаты нашей точки послѣ деформаціи будутъ: $x' = x+u'$; $y' = y+v'$; $z' = z+w'$. или дѣлая подстановку, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (1+\partial)x + g_3 y + g_2 z \\ y' &= g_3 x + (1+\partial_2) y + g_1 z \\ z' &= g_2 x + g_1 y + (1+\partial_3) z \end{aligned}\right\} \text{коэффиціэнты здѣсь постоянны.}$$

Такимъ образомъ выражены новыя координаты черезъ старыя. Какъ видимъ, зависимость линейная. Можно и наоборотъ, разрѣшая предъидущія ур-ія относительно x, y, z, линейно выразить зависимость старыхъ координатъ отъ новыхъ. Отсюда ясно, что точки, лежавшія до деформаціи въ плоскости, и послѣ деформаціи будутъ лежать въ нѣкоторой плоскости. Точки, лежавшія на нѣкоторой прямой, будутъ и послѣ деформаціи находиться на прямой. Если точки лежали до деформаціи на поверхности какого-нибудь порядка, то и послѣ деформаціи онѣ будутъ ле-

жать на поверхности такого же порядка. Такая деформація называется <u>однородной</u>. Если произведемъ новую деформацію, то координаты точки выразятся такъ: $x'' = (1+\delta_1')x' + g_3'y' + g_2'z'$. Подставивши сюда выраженія x', y' и z' черезъ x, y, z, увидимъ, что результирующая деформація не равна суммѣ составляющихъ деформацій: именно, въ выраженія новыхъ координатъ войдутъ не только суммы, но и произведенія коэффиціентовъ характеризующихъ обѣ деформаціи. Если деформаціи весьма малы, то произведенія коэффиціентовъ могутъ быть отброшены какъ малыя величины высшаго порядка, и въ этомъ случаѣ деформаціи будутъ складываться. Тогда новыя координаты будутъ выражаться такимъ образомъ:
$x'' = (1+\delta_1+\delta_1')x + (g_3+g_3')y + (g_2+g_2')z$, новая деформація будетъ характеризоваться суммами коэффиціентовъ. Въ этомъ заключается принципъ сосуществованія малыхъ деформацій. Въ этомъ случаѣ нѣтъ надобности обращать вниманіе на порядокъ деформацій, и деформаціи могутъ быть разсматриваемы независимо одна отъ другой.

Выше мы видѣли, что проэкція $AX_1 = \frac{25}{r}$. Далѣе, мы замѣтили, что въ случаѣ весьма малой деформаціи $AX_1' = r'2r$.

Положимъ $r'=(1+\delta)r$; тогда $r'-r=r\delta$. Подставляя эту величину вмѣсто AN', найдемъ:

$$\delta = {}^{2F}/_{r^2} = \partial_1\left(\frac{x}{r}\right)^2+\partial_2\left({}^{y}/_{r}\right)^2+\partial_3\left({}^{z}/_{r}\right)^2+$$
$$+2g_1{}^{y}/_{r}\cdot{}^{z}/_{r}+2g_2{}^{x}/_{r}\cdot{}^{z}/_{r}+2g_3{}^{y}/_{r}\cdot{}^{x}/_{r}.$$

Мы видимъ отсюда, что величина δ не зависитъ отъ положенія точки N, а только отъ *направленія* линіи r, ибо δ зависитъ отъ косинусовъ ${}^{x}/_{r}$, ${}^{y}/_{r}$, ${}^{z}/_{r}$ линіи r съ осями координатъ. Отсюда и изъ формы соотношенія между r', r и δ, т. е. изъ $r'=(1+\delta)r$ мы видимъ, что δ представляетъ удлиненіе единицы длины въ направленіи r. Если δ было бы отрицательно, то оно представляло бы укорачиваніе.

Мы можемъ представить нѣкоторой поверхностью законъ распредѣленія удлиненій по различнымъ направленіямъ, исходящимъ изъ точки M. Будемъ изъ M откладывать длины $\rho=\sqrt{\pm 1/\delta}$; знакъ + берется, когда δ положительно (удлиненіе), знакъ −, когда δ отрицательно (укорачиваніе). Слѣдовательно $\delta=\pm\frac{1}{\rho^2}$. Мы намѣрены откладывать ρ по направленіямъ линій r, исходящихъ изъ M, и потому, обозначая черезъ x', y' z' координаты поверхности, соединяющей оконечности отложенныхъ такимъ образомъ длинъ, будемъ имѣть $\frac{x'}{\rho}={}^{x}/_{r}$, ${}^{y'}/_{\rho}={}^{y}/_{r}$; $\frac{z'}{\rho}={}^{z}/_{r}$.
Это суть Cos-ы угловъ, дѣлаемыхъ направленіемъ ρ и r съ осями координатъ.

Подставляя въ выраженіе δ найденныя выраженія, получимъ:

$$\delta = \vartheta_1 \frac{x^2}{\rho^2} + \vartheta_2 y^2/\rho^2 + \ldots\ldots$$

Подставляя въ полученное выраженіе вмѣсто $\delta = \pm 1/\rho^2$, сокращая на $1/\rho^2$, и отбрасывая значки при x, y, z, какъ лишніе, получимъ ур-іе искомой поверхности въ такомъ видѣ:

$\vartheta_1 x^2 + \vartheta_2 y^2 + \vartheta_3 z^2 + 2g_1 yz + 2g_2 zx + 2g_3 xy = \pm 1 = 2F$. ((+) когда имѣемъ дѣло съ удлинненіемъ, а (−), когда съ укороченіемъ). Эта поверхность называется *поверхностью удлинненія*. Изслѣдуя ур-іе $2F = \pm 1$, мы ближе познакомимся со свойствами однородной деформаціи. Поверхность удлинненія есть поверхн. второго порядка, при томъ центральная, такъ какъ ея ур-іе удовлетворяется $\pm x; \pm y; \pm z$. Пусть x', y', z' — текущія координаты. Ур-іе касательной плоскости къ поверхности въ точкѣ x, y, z, будетъ:

$\frac{\partial F}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y' - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(z' - z) = 0$. Cos-ы угла нормали съ осями выразятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}; \\ \beta &= \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{id.}}; \; \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{id.}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (XIII)$$

Перпендикуляръ, опущенный изъ начала на касательную плоскость, будетъ $p = \frac{x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{id.}} = 2F/\sqrt{id.}$

Опредѣляя корень изъ выраженій α, β, γ, получимъ:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\alpha}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\beta}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\gamma}=\frac{2F}{\rho}.$$

Но $\frac{\partial F}{\partial x}=U'$; $\frac{\partial F}{\partial y}=V'$; $\frac{\partial F}{\partial z}=W'$, поэтому послѣднія соотношенія можно переписать такъ:

$$\frac{\delta_1 x+g_3 y+g_2 z}{\alpha}=\frac{g_3 x+\delta_2 y\pm g_1 z}{\beta}=\frac{g_2 x+g_1 y+\delta_3 z}{\gamma}=\frac{2F}{\rho}=\pm\frac{1}{\rho}$$

Воспользуемся этими равенствами для отысканія осей нашей поверхности. Оси поверхности второго порядка суть такіе радіуса-вектора, которые совпадаютъ съ нормалями къ поверхности. Въ этихъ случаяхъ радіусъ-векторъ будетъ равенъ ρ и проэкціи радіуса-вектора на оси координатъ т. е. x, y, z будутъ въ тоже время и проэкціями ρ на тѣ же оси. Поэтому $\alpha=\frac{x}{\rho}$; $\beta=\frac{y}{\rho}$; $\gamma=\frac{z}{\rho}$; и эти соотношенія справедливы только для осей. Подставляя въ ранѣе написанное выраженіе, получимъ:

$$\frac{\delta_1\alpha+g_3\beta+g_2\gamma}{\alpha}=\frac{g_3\alpha+\delta_2\beta+g_1\gamma}{\beta}=\frac{g_3\alpha+g_1\beta+\delta_3\gamma}{\gamma}=$$
$$=2F/\rho^2=\pm 1/\rho^2=D.$$

Здѣсь D означаетъ удлинненіе въ направленіи оси ρ нашей поверхности. Въ самомъ дѣлѣ изъ соотношенія $\delta=\pm 1/\rho^2$ слѣдуетъ, что если ρ есть полуось ρ, а δ есть удлинненіе D въ направленіи этой полуоси, то $D=\pm\frac{1}{\rho^2}$.

Къ предыдущимъ уравненіямъ присоединяемъ еще условіе $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.(a)$.

Комбинируя первыя части ур-ій съ послѣднею, получимъ слѣдующія три уравненія:

$$\left.\begin{aligned}(\vartheta_1-D)\alpha+g_3\beta+g_2\gamma&=0\\ g_3\alpha+(\vartheta_2-D)\beta+g_1\gamma&=0\\ g_2\alpha+g_1\beta+(\vartheta_3-D)\gamma&=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\alpha)$$

Совокупность ур-ій (a) и уравненія (α) даетъ величину полуосей и ихъ направленіе, т. е. косинусы α, β, γ угловъ осей поверхности съ осями координатъ. Такъ изъ трехъ величинъ α, β, γ по крайней мѣрѣ одна должна быть отличною отъ нуля, ибо онѣ удовлетворяютъ ур-ію (a), то отсюда слѣдуетъ, какъ извѣстно, что детерминантъ системы трехъ ур-ій вида (α), содержащихъ нами неизвѣстныя α, β, γ, долженъ быть равенъ нулю, слѣдовательно:

$$\begin{vmatrix}(\vartheta_1-D) & g_3 & g_2\\ g_3 & (\vartheta_2-D) & g_1\\ g_2 & g_1 & (\vartheta_3-D)\end{vmatrix}=0.$$

Этотъ детерминантъ представляетъ кубическое ур-іе относительно D. Три его корня будутъ представлять собою три различныхъ удлиненія въ общемъ случаѣ. Это кубическое ур-іе имѣетъ такой видъ:

$$D^3-(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)D^2+(\vartheta_1\vartheta_2+\vartheta_2\vartheta_3+\vartheta_1\vartheta_3-g_1^2-g_2^2-g_3^2)D-$$
$$-(\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3+2g_1g_2g_3-\vartheta_1g_1^2-\vartheta_2g_2^2-\vartheta_3g_3^2)=0.$$

Всѣ три корня этого ур-ія будутъ дѣйствительны. Кубическое ур-іе допускаетъ или три дѣйствительныхъ, или одинъ дѣйствительный и два мнимыхъ сопряженныхъ корня. Докажемъ это.

Пусть наше ур-іе допускаетъ существованіе двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней. Пусть эти корни будутъ D_1 и D_2. Подставляемъ D_1 въ ур-ія (α):

$$\left.\begin{aligned} d_1\alpha_1 + g_3\beta_1 + g_2\gamma_1 &= D_1\alpha_1 \\ g_3\alpha_1 + d_2\beta_1 + g_1\gamma_1 &= D_1\beta_1 \\ g_2\alpha_1 + g_1\beta_1 + d_3\gamma_1 &= D_1\gamma_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots 1$$

Здѣсь α_1, β_1 и γ_1 суть косинусы угловъ направленія, по которому происходитъ первое удлинненіе. Аналогично напишемъ для D_2:

$$\left.\begin{aligned} d_1\alpha_2 + g_3\beta_2 + g_2\gamma_2 &= D_2\alpha_2 \\ g_3\alpha_2 + d_2\beta_2 + \gamma_2 g_1 &= D_2\beta_2 \\ g_2\alpha_2 + g_1\beta_2 + d_3\gamma_2 &= D_2\gamma_2 \end{aligned}\right\} \cdots 2.$$

Умножимъ ур-ія (1) соотвѣтственно на $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и сложимъ, принимая во вниманіе ур-ія (2), получимъ:

$$D_2\alpha_1\alpha_2 + D_2\beta_1\beta_2 + D_2\gamma_1\gamma_2 = D_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

или: $(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)(D_2 - D_1) = 0 \; \ldots\ldots \; (A)$.

Т. к. $D_1 = \alpha + \beta i$ и $D_2 = \alpha - \beta i$, то и с-ы направленій будутъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + b_1 i \\ \alpha_2 &= a_1 - b_1 i \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= a_2 + b_2 i \\ \beta_2 &= a_2 - b_2 i \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \gamma_1 &= a_3 + b_3 i \\ \gamma_2 &= a_3 - b_3 i \end{aligned}\right\}$$

Подставимъ эти значенія въ ур-іе (A), тогда получимъ:

$$(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2)\beta = 0.$$

Такъ какъ въ скобкахъ у насъ сумма квадратовъ, то она можетъ равняться 0 только въ томъ случаѣ, когда каждый изъ членовъ $a, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ равняются 0, иными словами, когда $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_1$ и $\gamma_2 = 0$, а это невозможно, такъ какъ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Поэтому β должно равняться 0. А это значитъ, что корни D_1 и D_2 дѣйствительны.

Если $D_1 \neq D_2$, то эти два направленія перпендикулярны, такъ какъ тогда изъ ур-ія (A) получимъ

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Итакъ, разсматриваемая нами деформація такова, что при ней существуютъ три взаимно перпендикулярныя направленія, удлиненія по которымъ называются главными удлиненіями, а эти направленія будутъ осями нашей поверхности второго порядка. Отсюда вытекаетъ слѣдующее важное слѣдствіе, что принимая оси координатъ по направленію осей поверхности, ур-іе ея представится въ видѣ, не содержащемъ членовъ съ произведеніями xy, xz, yz. Въ немъ сохранятся только члены x^2, y^2, z^2, при чемъ ихъ коэффиціенты $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ замѣнятся главными удлиненіями D_1, D_2, D_3. Итакъ, ур-іе $2F = \pm 1$ приметъ видъ:

$$D_1 x_0^2 + D_2 y_0^2 + D_3 z_0^2 = \pm 1 \ldots\ldots (XIII) \quad B$$

Лѣвая часть этого ур-ія есть въ то же время преобразованное въ новыя координаты выраженіе функціи $2F$; въ немъ, какъ мы видимъ, отсутствуютъ коэффиціенты $g_1\, g_2\, g_3$.

Отсюда заключаемъ, что въ новыхъ координатахъ функція $F = \frac{1}{2}(D_1 x_0^2 + D_2 y_0^2 + D_3 z_0^2)$. Слѣдовательно такъ какъ $u' = \frac{\partial F}{\partial x}$ и пр., то деформація въ этихъ новыхъ координатахъ представится выраженіемъ

$$u_0' = \frac{dF_0}{dx_0} = D_1 x_0;$$

$x + \partial_1 x = x(1+\partial_1$ [illegible] I

$$v_0' = \frac{dF_0}{dy_0} = D_2 y_0;$$

$$w_0' = \frac{dF_0}{dz_0} = D_3 z_0$$

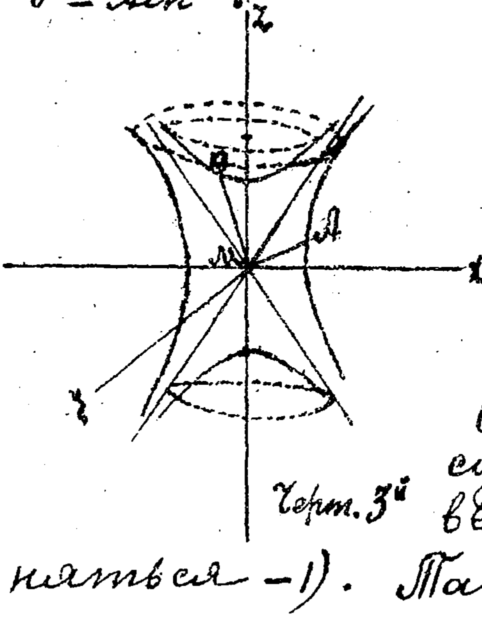
Слѣдовательно, отпали члены съ g_3, g_2, g_1. Итакъ, вся наша деформація, выражавшаяся при произвольныхъ осяхъ тремя членами, при выбранныхъ теперь специальныхъ осяхъ выражается однимъ членомъ и указываетъ, что вся деформація малаго объема приводится къ растяженію или сжатію по тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ по осямъ поверхности удлиненій. Эти оси называются главными осями деформаціи.

Ур-іе (B) представляетъ совокупность двухъ поверхностей

$$D_1 x_0^2 + D_2 y_0^2 + D_3 z_0^2 = +1 \ldots (I)$$

$$D_1x_0^2 + D_2y_0^2 + D_3z_0^2 = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.)$$

Если всѣ корни D_1, D_2, D_3 - положительные и не равны, то вторая поверхность, относящаяся къ сжатію - мнимая, а первая представляетъ трехосный эллипсоидъ; въ частныхъ случаяхъ это можетъ быть эллипсоидъ вращенія и сфера. Пусть одинъ изъ корней отрицательный. Напримѣръ, пусть $D_3<0$. Въ этомъ случаѣ обѣ поверхности дѣйствительны. Ур-іе (1) представляетъ собою однополый гиперболоидъ, ось котораго параллельна оси z, такъ какъ при $x_0=0$ и $y_0=0$, z_0 будетъ мнимое, слѣдовательно, поверхность не пересѣкаетъ оси z. Это та поверхность, въ направленіи радіусовъ-векторовъ которой нашъ объемъ растянутъ. Растяженіе единицы длины въ направленіи AM будетъ
$\delta = \frac{1}{AM^2}$.



Черт. 3й

Вторая поверхность есть, какъ легко видѣть, двуполый гиперболоидъ. Пересѣченіе этой поверхности съ плоскостью (xy) - мнимое (такъ какъ при $z=0$ - сумма положительныхъ величинъ должна равняться -1). Такъ какъ поверхность относится къ сжатію, то слѣдовательно въ направленіи радіусовъ-векторовъ этого двуполаго гиперболоида нашъ объемъ сжатъ. Сжатіе его будетъ

$$\delta = -\frac{1}{3}M^2 .$$

Между этими двумя поверхностями лежитъ ассимптотическій конусъ, ур-іе котораго напишется въ слѣдующемъ видѣ: $D_1 x_0^2 + D_2 y_0^2 + D_3 z_0^2 = 0$.

Въ этомъ направленіи нѣтъ ни расширенія, ни сжатія. Слѣдовательно, область, въ которой происходитъ расширеніе, отдѣляется конусомъ отъ области, въ которой происходитъ сжатіе. Поверхность этого конуса называется поверхностью скольженія. Можно еще иначе составить себѣ представленіе о разсматриваемой деформаціи. Задача будетъ состоять въ томъ, чтобы опредѣлить поверхность, въ которую деформируется шарикъ внутри объема. Какъ мы знаемъ, деформація не измѣняетъ порядка поверхности. Мы видѣли, что

$$U'_0 = D_1 x_0 ; \; V'_0 = D_2 y_0 ; \; W'_0 = D_3 z_0 ;$$

Точка N, лежащая на поверхности шарика, получитъ вслѣдствіе деформаціи новое положеніе, такъ какъ къ ея первоначальнымъ координатамъ x_0, y_0, z_0 прибавятся эти перемѣщенія U'_0, V'_0, W'_0. Тогда новыя координаты точки N напишутся такъ

$$\left.\begin{aligned} X'_0 &= (1+D_1)x_0 ; \\ Y'_0 &= (1+D_2)y_0 \\ Z'_0 &= (1+D_3)z_0 \end{aligned}\right\} \dots\dots (C)$$

Пусть радіусъ шарика, взятаго внутри объема вокругъ точки M, будетъ R. Тогда ур-іе поверхности этого шарика будетъ

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2.$$

Подставляя въ это ур-іе значенія x_0, y_0, z_0 изъ ур-ій (c), получимъ:

$$\frac{x_0'^2}{(1+D_1)^2}+\frac{y_0'^2}{(1+D_2)}+\frac{z_0'^2}{(1+D_3)^2}=R^2.$$

Это есть ур-іе поверхности эллипсоида; слѣдовательно всякій малый шарикъ, взятый внутри объема послѣ деформаціи превращается въ эллипсоидъ. Оси этого эллипсоида по своему направленію совпадаютъ съ главными осями деформаціи. Какъ слѣдствіе изъ этого положенія можемъ вывести измѣненіе единицы объема внутри взятаго нами объема.

Объемъ шарика есть $4/3\,\pi R^3$, а объемъ эллипсоида

$$4/3\,\pi R(1+D_1)R(1+D_2)R(1+D_3).$$

Вычитая изъ объема эллипсоида объемъ шарика, получимъ увеличеніе нашего объема вслѣдствіе деформаціи, именно:

$$4/3\,\pi R^3\left[(1+D_1)(1+D_2)(1+D_3)-1\right].$$

Каждая единица первоначальнаго объема увеличилась на величину, стоящую въ скобкахъ. Это кубическое расширеніе; если же величина, заключенная въ скобки, отрицательна, то кубическое сжатіе.

Итакъ, кубическое расширеніе или сжатіе Θ есть:

$$\Theta = (1+D_1)(1+D_2)(1+D_3)-1.$$

Такъ какъ мы разсматриваемъ безконечно малую деформацію, то произведенія D_1, D_2 и D_3 можемъ отбросить вслѣдствіе ихъ безконечной малости, тогда получимъ

$$\Theta = D_1 + D_2 + D_3,$$

т. е. Θ равняется суммѣ главныхъ удлиненій. Такъ какъ сумма корней кубическаго ур-ія равна коэффиціенту при второй степени неизвѣстнаго, взятому съ обратнымъ знакомъ, то

$$\Theta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Откуда слѣдуетъ, что кубическое расширеніе равняется суммѣ удлиненій, взятыхъ по тремъ какимъ угодно взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ. Эта сумма постоянна и равна суммѣ главныхъ удлиненій. Выраженіе кубическаго расширенія иначе можно представить такъ:

$$\Theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Изъ предыдущаго заключаемъ еще, что однородная деформація такова, что поверхность системы состоитъ всегда изъ однѣхъ и тѣхъ же матеріальныхъ точекъ. Если точка среды находилась внутри ея, то и послѣ деформаціи она останется внутри, а не попадетъ на поверхность; ни одна частица съ поверхности не попадетъ при однородной деформаціи внутрь и обратно. Это потому, что точка M, находящаяся внутри среды, можетъ быть принята за центръ малой сферы, которая деформируется въ эллипсоидъ, центръ коего лежитъ въ той же точкѣ M.

Рѣшимъ еще одинъ вопросъ.

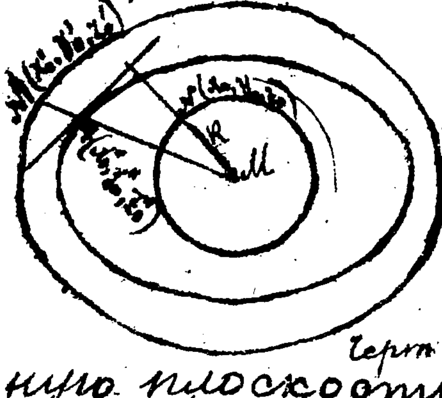
Опишемъ около точки M сферу, которая деформируется въ эллипсоидъ.

Узнаемъ, въ какое мѣсто поверхности эллипсоида перешла точка N поверхности сферы.

Для этого построимъ еще одну поверхность второго порядка:

$$\frac{x_0''^2}{1+D_1}+\frac{y_0''^2}{1+D_2}+\frac{z_0''^2}{1+D_3}=R^2$$

Проведенная поверхность будетъ лежать внутри эллипсоида деформаціи, если $D>0$, т. к. тогда $1+D>\sqrt{1+D}$.



Черт. 4го

Соединимъ точки M и N и продолжимъ MN до пересѣченія со второю поверхностью. Проведемъ ко второй поверхности касательную плоскость, которая была бы перпендикулярна къ MN.

Уравненіе этой плоскости будетъ

$$\frac{x_0''x}{1+D_1}+\frac{y_0''y}{1+D_2}+\frac{z_0''z}{1+D_3}=R^2,$$ гдѣ x_0'', y_0'', z_0'' суть координаты точки касанія A.

Выразимъ условіе, что эта плоскость перпендикулярна къ MN. Косинусъ угла, который дѣлаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки M на эту плоскость съ осью x, есть

$$\frac{\frac{x_0''}{1+D_1}}{\sqrt{\left(\frac{x_0''}{1+D_1}\right)^2+\left(\frac{y_0''}{1+D_2}\right)^2+\left(\frac{z_0''}{1+D_3}\right)^2}} \quad \ldots\ldots(\alpha)$$

Это, слѣдовательно, есть косинусъ угла прямой MN съ осью x. Слѣдовательно, выраженіе (α) равняется $\frac{x_0}{R}$. Поэтому

$$\frac{x_0''}{\sqrt{\Sigma}}=\frac{x_0(1+D_1)}{R}$$

$x_0(1+D_1)=x_0'$ - координата, опредѣляющая новое положеніе точки N на эллипсоидѣ деформаціи.

Итакъ $\frac{R}{\sqrt{\Sigma}}=\frac{x_0'}{x_0''}$.

Аналогично получимъ

$$\frac{R}{\sqrt{\Sigma}}=\frac{x_0'}{x_0''}=\frac{y_0'}{y_0''}=\frac{z_0'}{z_0''};$$

такимъ образомъ новое положеніе точки N на нашемъ эллипсоидѣ таково, что отношеніе этихъ новыхъ координатъ къ координатамъ точки касанія постоянно. Это же есть условіе, что

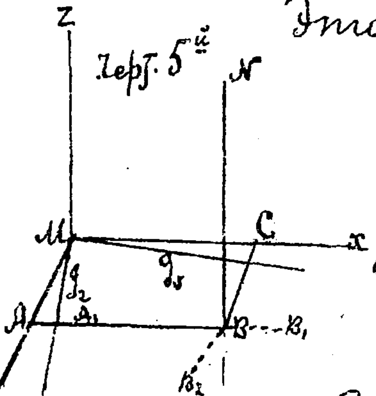
A и N₁ лежатъ на одной прямой, проходящей черезъ начало координатъ (въ нашемъ случаѣ — черезъ точку M). Мы имѣли раньше въ произвольныхъ координатахъ, что $u' = \delta_1 x + g_3 y + g_2 z$, слѣдовательно новыя координаты будутъ:

$$x' = x + u' = x(1+\delta_1) + g_3 y + g_2 z$$
$$y' = y + v' = g_3 x + (1+\delta_2) y + g_1 z$$
$$z' = z + w' = g_2 x + g_1 y + (1+\delta_3) z\ .$$

Мы знаемъ смыслъ δ_1; это есть удлиненіе въ направленіи оси x.

Посмотримъ, что такое g_1, g_3 и g_2?

Для рѣшенія этого вопроса возьмемъ какую-ниб. точку N и вообразимъ систему прямоугольныхъ координатъ xyz. Предположимъ, что деформація, которая происходитъ въ нашемъ объемѣ, состоитъ въ измѣненіи прямого угла между прямыми линіями, совпадающими съ осями y и x на уголъ g_3.


Черт. 5^й

Это значитъ, что точка A, лежащая на оси y, перемѣстилась вслѣдствіе скольженія линіи AB по своему собственному направленію въ A_1 и B въ B_1, причемъ $BB_1 = AA_1 = y\,tg\,g_3 = y g_3$ (при маломъ углѣ. Слѣдов. BB_1 есть увеличеніе координаты x вслѣдствіе измѣненія положенія точки N, а g_3 есть скольженіе прямой, отстоящей отъ начала координатъ на разстояніе, равное единицѣ отъ точки M, считая по оси Y. Пусть и прямая, совпадающая съ осью X, измѣняетъ свое направленіе въ ay на тотъ же уголъ g_3. Вслѣдствіе скольженія прямой BC B перемѣстится въ B_2 и $BB_2 = xg_3$. Члены yg_3 и xg_3 входятъ въ выраженія x' и y' и представляютъ слѣдовательно измѣненія въ x и y, вслѣдствіе скольженій въ xy.

Итакъ g_3 есть половина измѣненія прямого угла въ плоскости XY; полное его измѣненіе $2g_3$, оно измѣряетъ скольженіе прямыхъ, параллельныхъ осямъ X и Y. Такъ же легко выяснить значеніе g_1 и g_2. Именно, $2g_1$ - измѣненіе прямого угла въ плоскости YZ; а $2g_2$ - въ плоскости XZ.

Когда деформація была отнесена къ главнымъ осямъ деформацій, выраженія новыхъ координатъ (с) не содержали въ себѣ членовъ, зависящихъ отъ скольженій. Отсюда слѣдуетъ, что прямые углы между линіями, параллельными главнымъ осямъ, не измѣняются. Такимъ образомъ въ каждой точкѣ среды существуютъ три взаимно перпендикулярныхъ направленія, которые не измѣняются происходящей однородной деформаціей.

Эти направленія при переходѣ отъ одного безконечно-малаго объема къ другому внутри нашей среды, вообще говоря, различны.

Закончимъ изложеніе вопроса о деформаціи разсмотрѣніемъ условій, существующихъ на границахъ средъ.

Ур-іе $F(x, y, z, t)=0$ представляетъ собою ур-іе поверхности среды. Если произошла малая деформація въ малое время T, то ур-іе границы будетъ

$$F(x+u,\ y+v,\ z+w,\ t+T)=0.$$

Развертывая эту функцію въ строку Тейлора и пренебрегая членами степени выше первой, получаемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial t}T+\frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w=0\ldots\ldots(1)$$

для другой соприкасающейся среды можемъ написать:

$$\frac{\partial F}{\partial t}T+\frac{\partial F}{\partial x}u'+\frac{\partial F}{\partial y}v'+\frac{\partial F}{\partial z}w'=0\ldots(2)$$

гдѣ u', v', w' суть перемѣщенія въ новой средѣ.

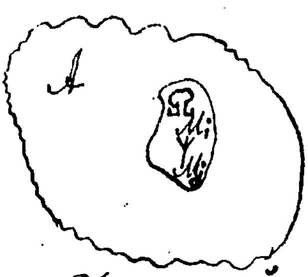
Вычитая (2) изъ (1), получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u-u')+\frac{\partial F}{\partial y}(v-v')+\frac{\partial F}{\partial z}(w-w')=0.$$

Раздѣлимъ это ур-іе на $\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$, замѣтимъ, что коэффиціенты при $(u-u')$, $(v-v')$ и $(w-w')$ будутъ соотвѣтственно косинусы угловъ нормали къ поверхности границы съ осями координатъ. Поэтому $cs(nx)(u-u')+cs(ny)(v-v')+$ $+cs(nz)(w-w')=0$. Вотъ условіе, которому должны удовлетворять перемѣщенія на границѣ двухъ средъ.

Если $(u-u')=(v-v')=(w-w')=0$, то это значитъ, что на границѣ точки одной среды неизмѣняемо соединены съ точками другой среды.

II Теперь мы перейдемъ къ динамической сторонѣ интересующаго насъ вопроса объ однородныхъ упругихъ деформаціяхъ. Намъ нужно будетъ разсмотрѣть силы, участвующія въ однородныхъ деформаціяхъ. Представимъ нашу среду и внутри ея какой нибудь конечный объемъ; намѣтимъ въ немъ точку M, и постараемся опредѣлить силы, дѣйствующія на эту точку. Предполагаемъ, что между частицами дѣйствуютъ силы консервативныя, направленныя по линіямъ, соединяющимъ каждыя двѣ точки, и зависящія отъ разстоянія между ними.



Черт. 6^a.

Литогр. Общ. распр. пол. зн.

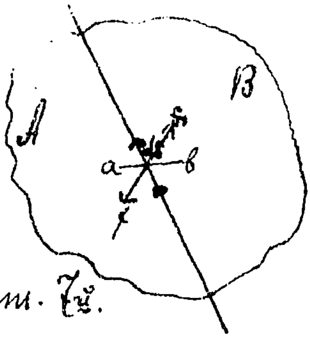
Возьмемъ другую точку M_j. На точку M_i будетъ дѣйствовать отъ M_i сила K, зависящая отъ разстоянія r_{ij} между точками. Эту силу мы разложимъ на три составляющихъ, параллельныхъ осямъ координатъ, для чего K придется помножить на cos-ы угловъ, составляемыхъ r_{ij} съ осями.

$$X_{ij} = K\frac{x_i - x_j}{r_{ij}},\quad Y_{ij} = K\frac{y_i - y_j}{r_{ij}},\quad Z_{ij} = K\frac{z_i - z_j}{r_{ij}}$$

Аналогично силы, дѣйствующія отъ M_i на M_j, будутъ: $X_{ji} = K\frac{x_j - x_i}{r_{ij}}$ и т. д.

Сумма всѣхъ слагающихъ силъ, дѣйствующихъ на точку M_i отъ всѣхъ точекъ взятаго объема параллельно оси x, будетъ ΣX_{ij}. Если мы это суммированіе будемъ производить не для одной точки M, а распространимъ на весь объемъ Ω, то получимъ двухкратную сумму $\int \Sigma_j X_{ij}$, которую можно разбить на пары $X_{ij} + X_{ji}$ взаимно уничтожающихся силъ, откуда слѣдуетъ, что $\int_i \Sigma_j X_{ij} = 0$. Кромѣ этой группы внутреннихъ силъ мы имѣемъ 2-ю группу, которая исходитъ изъ остальной части нашей системы A. Для выясненія роли этихъ силъ сдѣлаемъ нѣсколько предварительныхъ замѣчаній.

Данную нашу сферу разсѣчемъ какою-нибудь поверхностью на двѣ части A и B и на этой границѣ возьмемъ элементъ ds.



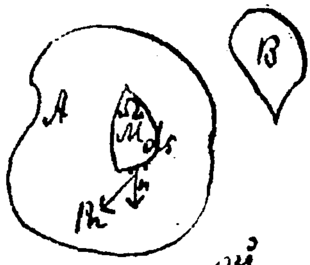
Черт. 7й.

Найдемъ такую систему поверхностныхъ, т. е. приложенныхъ къ границѣ частей А и В силъ, которыя замѣнили бы собой силы взаимодѣйствія объема А на объемъ В, не измѣняя происходящей отъ этого деформаціи. Эта задача выполнима только въ томъ случаѣ, когда взаимодѣйствіе частицъ другъ на друга распространяется лишь на весьма малыя разстоянія. На этомъ предположеніи мы и остановимся.

Выдѣлимъ двѣ весьма близкія точки а и в въ частяхъ А и В. При сдѣланномъ предположеніи (дѣйствіе на безконечно малыхъ разстояніяхъ) можно будетъ силу, съ которой а притягиваетъ в, перенести на одну сторону элемента поверхности dσ въ какую-нибудь его точку, а силу притяженія, оказываемую в на а на другую. Эти силы уже можно будетъ складывать другъ съ другомъ, а равнодѣйствующія ихъ f и f' будутъ равны. Такимъ образомъ дѣйствіе частицъ, лежащихъ по обѣ стороны границы, приводится къ дѣйствію на элементы границы нѣкоторыхъ поверхностныхъ силъ. — Вотъ это необходимыя для насъ замѣчанія.

Пусть $Xd\omega$ будетъ сила слагающая,

(параллельная оси x), съ которой дѣйствуютъ другъ на друга уже точки, лежащія внутри и внѣ выдѣленнаго нами объема Ω. Тогда $\sum_A X_{AM}$ будетъ сила, съ



Черт. 8ое.

которой всѣ точки, наполняющія объемъ A, дѣйствуютъ на точку M, а двукратная сумма $\int_i \sum_A X_{AM}$ будетъ представлять силу взаимодѣйствія всего объема A на объемъ Ω. Эти силы по предыдущему можно замѣнить поверхностными силами, такъ что $\int_i \sum_A X_{AM} = \sum X_n$. Если поверхностная сила, дѣйствующая на площадку ds, нормаль которой есть n, будетъ P_n, то ея слагающія, параллельныя осямъ координатъ, будутъ X_n, Y_n, Z_n. Ту же силу можно разложить и иначе: на параллельную по нормали n и на тангенціальную (скользящую) по элементу ds. Кромѣ того могутъ быть еще внѣшнія силы, исходящія изъ внѣшнихъ центровъ B. Ихъ слагающія пусть будутъ X', Y', Z'.

Въ послѣднее время нѣкоторые ученые (Voigt) вводятъ въ разсмотрѣніе нѣкоторыя внѣшнія силы, которыя позволяютъ получить ур-ія электромагнитной теоріи свѣта изъ основныхъ ур-ій измѣняемой системы. И мы введемъ эту гипотетическую систему силъ, не связанную съ существованіемъ как.-ниб. матеріальныхъ точекъ. Такія силы могутъ быть вызваны въ явленіи тѣмъ, что частицы нашей среды наэлектризованы, или намагничены. Слагающія этихъ силъ по осямъ координатъ обозначимъ черезъ X'', Y'', Z''; онѣ исходятъ, по предположенію, изъ массъ, нами непосредственно не опредѣляемыхъ. Можно бы сдѣлать предположеніе, что эти силы не только могутъ дѣйствовать на массы, заключающіяся въ малыхъ объемахъ, но и могутъ быть поверхностными, т. е. приложенными къ площадкамъ, ограничивающимъ такіе объемы. Эту гипотезу мы оставимъ, а выставимъ только слѣдующее упрощающее предположеніе: $S_i X''=0$, $S_i Y''=0$, $S_i Z''=0$, при чемъ сумма берется по всему объему Ω, окружающему точку M. Такого рода предположеніе вводитъ слѣдующее упрощеніе: если сумма всѣхъ слагающихъ по оси равна нулю, то эти силы не вызываютъ поступательнаго перемѣщенія объема по направленію, въ которомъ онѣ дѣйствуютъ, а только вращательное.

Имѣя въ виду указанныя нами выше силы, составимъ ур-ія движенія точки M (центра массы элементарнаго объема Ω).

Пусть координаты точки M суть x, y, z. Тогда (a) $\rho \frac{d^2x_i}{dt^2} d\omega = SX^e + \Sigma X_{ij}$;

$$(b)\ \rho \frac{d^2y}{dt^2}d\omega = \int Y^e + \Sigma Y_{ij};$$

$$(c)\ \rho \frac{d^2z}{dt^2}d\omega = \int Z^e + \sum Z_{ij}$$

гдѣ $d\omega$ - безконечно-малый элементарный объемъ, окружающій точку M,

ρ - плотность, слѣдовательно $\rho d\omega$ масса объема $d\omega$, X^e, Y^e, Z^e - внѣшнія силы, дѣйствующія на объемъ; подъ этими силами будемъ подразумѣвать силы, исходящія изъ объема A и B; X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} - силы, исходящія изъ объема Ω. Составимъ суммы такихъ ур-ій, взятыхъ для всѣхъ точекъ объема Ω. Въ $\int X^e$ входятъ какъ силы, образующіяся въ поверхностныя, т.е. X_n, такъ силы X'. $\int \Sigma X_{ij}$, взятая по всѣмъ точкамъ Ω, такъ какъ она взаимна, обращается въ 0.

На основаніи этого будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\int\rho \frac{d^2x}{dt^2}d\omega &= \int X'd\omega + \int X_n ds;\\ \int\rho \frac{d^2y}{dt^2}d\omega &= \int Y'd\omega + \int Y_n ds,\\ \int\rho \frac{d^2z}{dt^2}d\omega &= \int Z'd\omega + \int Z_n ds,\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (I)$$

гдѣ $d\omega$ есть элементъ объема Ω, а ds элементъ поверхности, его ограничивающей. Здѣсь X_n, Y_n, Z_n суть силы, отнесенныя къ $1^{ц}$ площади. Составимъ еще изъ (a), (b) (c) ур-ій моментовъ, умноживъ (b) на z и (c) на y и вычтя $1^е$ изъ второго.

$$\rho d\omega\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = y\int Z^e - z\int Y^e + y_i\Sigma Z_{ij} - z_i\Sigma Y_{ij}.$$

Возьмемъ суммы для всѣхъ точекъ, получимъющихъ объемъ Ω:

$$\int\rho dw\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\int_\Omega\left(y\rho Z^e-Z\rho Y^e\right)+\int_\Omega\left(y_i\Sigma Z_{ij}-z_i\Sigma Y_{ij}\right)$$

Въ послѣдній членъ войдетъ какъ выраженіе $y_iZ_{ij}-z_iY_{ij}=K_{ij}\left(y_i\frac{z_i-z_j}{r_{ij}}-z_i\frac{y_i-y_j}{r_{ij}}\right)$, такъ и

$$y_iZ_{ji}-z_jY_{ji}=K_{ij}\left(y_j\frac{z_j-z_i}{r_{ji}}-z_j\frac{y_j-y_i}{r_{ji}}\right)$$

На подобныя пары взаимно уничтожающихся выраженій распадается послѣдній членъ. Слѣдовательно, въ нашемъ ур-іи послѣдняя сумма, относящаяся къ дѣйствію частицъ другъ на друга въ объемъ Ω, исчезнетъ, и останется: $\int\rho dw\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\int_\Omega\left(y\rho Z^e-z\rho Y^e\right)$.

Въ наши Z^e и Y^e будутъ входить силы Y', Z' и кромѣ того Y'', Z''. До сихъ поръ мы ихъ не вводили потому, что $\rho Y''=0, \rho Z''=0$, но въ это выраженіе они должны войти, ибо они множатся подъ знакомъ $\int$ на Y и Z. Обозначимъ $yZ''-zY''$ черезъ L, аналогично $zX''-xZ''=M$, $xY''-yX''=N$. Это будутъ моменты вращеній введенныхъ силъ X'', Y'', Z'', лежащихъ пока внѣ области механики.

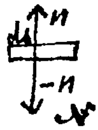
Сюда же войдутъ поверхностныя силы X_n, Y_n, Z_n = результатъ взаимодѣйствія объема A на объемъ Ω.

Такимъ образомъ $\int\rho dw\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt}\right)=$

$$=\int(yZ'-zY'+L)dw+\int(yZ_n-zY_n)ds;$$

$$\text{II}\begin{cases}\int\rho\,dw\left(z\frac{d^2x}{dt}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\int(zX'-xZ'+M)dw+\int(zX_n-xZ_n)ds\\ \int\rho\,dw\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\int(xY'-yX'+N)dw+\int(xY_n-yX_n)ds\end{cases}$$

Въ первыхъ частяхъ имѣемъ моменты силъ, дѣйствующихъ на элементы объемовъ и слѣдовательно на элементы поверхности. Приложимъ полученные выводы къ случаю дѣйствія силъ на короткій цилиндръ, основаніе котораго - безконечно-малая величина второго порядка, а высота въ предѣлѣ приближается къ нулю. Получимъ изъ (I):



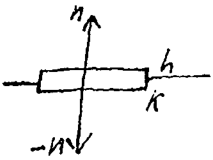
$$\rho\frac{d^2x}{dt^2}dw=X'dw+(X_n+X_{-n})ds \quad \text{и. т. д.}$$

№9. Пренебрегая величинами третьяго порядка предъ величинами второго порядка, получимъ $X_n+X_{-n}=0$, $Y_n+Y_{-n}=0$, $Z_n-Z_{-n}=0$.

Безконечно-малый цилиндрикъ мы разсматривали внутри объема и пришли къ раньше выведенному заключенію. У насъ силы $f_1=f'$, т. е. и $f_n=f_{-n}$. n и $-n$ - направленія (прямой) нормалей.

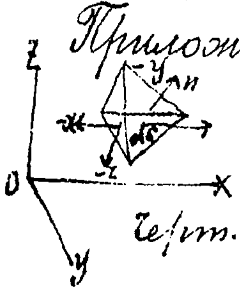
черт. 10ᵃ.

Теперь предположимъ, что граница двухъ средъ проходитъ не внѣ цилиндра, а внутри его. Тогда мы къ прежнимъ силамъ должны будемъ прибавить новую силу, обусловленную молекулярнымъ взаимодѣйствіемъ соприкасающихся средъ. Если слагающія этой силы обозначимъ чрезъ X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk}, то для пограничнаго слоя будемъ имѣть:



$X_n + X_{-n} + X_{hk} = 0$, $Y_n + Y_{-n} + Y_{hk} = 0$, $Z_n - Z_{-n} + Z_{hk} = 0$.

Выведенныя раньше условія будутъ справедливы и на границѣ двухъ средъ, представляя частный случай этихъ самыхъ общихъ, - когда особыхъ молекулярныхъ дѣйствій, обусловливаемыхъ прикосновеніемъ, нѣтъ.



Черт. 11-й.

Приложимъ ур-іе (I) къ безконечно-малому, элементарному объему, имѣющему форму тетраэдра. Возьмемъ элементарный треугольникъ ds и чрезъ его стороны проведемъ плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ; полученный такимъ образомъ тетраэдръ и будемъ разсматривать.

Объемные интегралы будутъ величинами третьяго порядка, а поверхностные - 2го, такъ что первыми можно будетъ пренебречь предъ вторыми. Три боковыя площадки тетраэдра, перпендикулярныя, очевидно, къ осямъ координатъ, пусть будутъ a, b и c.

Изъ ур-ій (I) получаемъ $\int X_n ds = 0$ (A) или

$$X_n ds + X_{-x} a + X_{-y} b + X_{-z} c = 0 \quad (B).$$

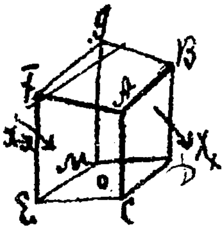
Интегралы замѣнятся подъинтегральными выраженіями вслѣдствіе безконечно-малыхъ размѣровъ тетраэдра. Легко сообразить изъ условій выведенныхъ выше, что $X_{-x} = -X_x$, $X_{-y} = -X_y$ и $X_z = -X_z$, какъ силы, дѣйствующія на тѣ же площадки, но въ противоположныхъ направленіяхъ. Замѣтимъ сверхъ того, что a, b, c суть проекціи на плоскости координатъ площадки ds, т. е. a

$$\left.\begin{array}{l} a = ds\, cs(nx), \\ b = ds\, cs(ny) \\ c = ds\, cs(nz) \end{array}\right\}$$ Выраженіе В и два аналогичныхъ ему по сокращеніи на ds, примутъ теперь такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l} X_n = X_x\, cs(nx) + X_y\, cs(ny) + X_z\, cs(nz). \\ Y_n = Y_x\, cs(nx) + Y_y\, cs(ny) + Y_z\, cs(nz). \\ Z_n = Z_x\, cs(nx) + Z_y\, cs(ny) + Z_z\, cs(nz). \end{array}\right\}.$$

Въ предѣлѣ три взаимно перпендикулярныя площадки могутъ быть разсматриваемы какъ пересѣкающіяся въ точкѣ площадки ds. Тогда предыдущія ур-ія даютъ намъ зависимость между (самими) силами, дѣйствующими на ж-н. безконечно-малую площадку и силами, дѣйствующими на три другія, взаимно-перпендикул. и пересѣкающіяся въ одной изъ ея точекъ. Ур-ія моментовъ (II) ничего не дадутъ для разсматриваемаго здѣсь случая тетраэдра.

Разсмотримъ $3^{ью}$ элементарную форму: безконечно малый параллелипедъ.



Черт. $12^{й}$.

Пусть площадки его перпендикулярны къ осямъ ко-тъ, и внѣшнія нормали къ нимъ имѣютъ направленія +x и -x, +y и -y, +z -z. Величины этихъ площадокъ назовемъ послѣдовательно a, b, c. Примѣнимъ къ этому случаю ур-іе движенія по направленію оси $x^{овъ}$:

Интегралы опять могутъ быть замѣнены подынтегральными ф-іями, т. к. объемъ параллелипеда по условію безконечно-малъ. Поэтому имѣемъ:

$$\rho \frac{d^2x}{dt^2} dw = X dw + (X_x + X_{-x}) a + (X_y + X_{-y}) b + (X_z + X_{-z}) c. \quad (B)$$

Всѣ члены этого ур-iя, какъ мы увидимъ, суть одного и того же порядка, третьяго. Слагающiя X_x, X_y и X_z можно выразить черезъ силы, которыя дѣйствуютъ на площадки, сходящiяся въ точкѣ M, но направлены въ противоположныя стороны тѣмъ, которыя приложены къ ихъ наружнымъ сторонамъ.

Здѣсь напримѣръ X_x есть сила, дѣйствующая параллельно x на наружную сторону площадки ABCD; X_{-x} есть сила, дѣйствующая на наружную сторону площадки EFGM. X_y и X_{-y} суть силы, дѣйствующiя параллельно x на наружныя стороны площадокъ перпендикулярно оси y и т.д. Сила X_{-x} направлена въ противную сторону силѣ X_{+x}. Поэтому замѣнимъ ее прежде всего другою, направленною въ сторону +x. Назовемъ черезъ X^i_{+x} силу, приложенную къ внутренней сторонѣ площадки EFMG. По условiямъ, найденнымъ выше, $X_x + X_{+x} = 0$, т. е. $-X_x = X^i_{+x}$ и т. д.

Положенiя безконечно-малыхъ площадокъ, перпендикулярныхъ къ однимъ и тѣмъ же осямъ напр. ABCD и EFMG, разнятся другъ отъ друга безконечно-мало; поэтому и силы, дѣйствующiя на нихъ, разнятся безконечно-мало. На этомъ основанiи мы можемъ произвести слѣдующую замѣну по строкѣ Тейлора:

$$X_x = X^i_{+x} + \frac{dX^i_{+x}}{dx} dx$$

$$X_y = X_{+y} + \frac{dX^i_{+y}}{dy} dy \qquad Z_z = X_z + \frac{dX^i_{z}}{dz} dz.$$

По подстановкѣ въ выраженіе $\rho\frac{d^2x}{dt^2}d\omega$ $X_{-y}+X^i_{y}=0$, $X_{-z}+X^i_{z}=0$, и замѣчая, что $X_{-x}+X^i_{+x}=0$, получимъ:

$$\rho\frac{d^2x}{dt^2}d\omega = Xd\omega+\frac{dx^i_{+x}}{dx}dx\cdot a+\frac{dx^i_{+y}}{dy}dy\,b+\frac{dx^i_{+z}}{dz}dz\cdot c.$$

Такъ какъ $adx=bdy=cdz=d\omega$, то послѣднее ур-іе можемъ сократить на эти величины. Затѣмъ, отбрасывая знакъ + при индексахъ x, y, z и указатель, ур-іе перепишемъ такъ:

$$\rho\frac{d^2x}{dt^2}=X'+\frac{dX_x}{dx}+\frac{dx_y}{dy}+\frac{dx_z}{dz}.$$

Здѣсь силы дѣйствуютъ на стороны площадокъ, перпендикулярныхъ къ осямъ и характеризующихся нормалями, имѣющими направленія положительныхъ осей.
Аналогично напишутся и ур-ія движенія (осей) по направленію осей y и z.

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2}=Y'+\frac{dy_x}{dx}+\frac{dy_y}{dy}+\frac{dx_z}{dz}$$

$$\rho\frac{d^2z}{dt^2}=Z'+\frac{dz_x}{dx}+\frac{dz_y}{dy}+\frac{dz_z}{dz}$$

Теперь рѣшимъ вопросъ о вращеніи параллелепипеда. Для этого примѣнимъ ур-іе моментовъ. Вообразимъ для этого случая, что координаты центра O парал-да суть x, y, z. Координаты центровъ площадокъ будутъ слѣдующія:

$a'.\ (x-dx/2,\ y,\ z);\ a^{x}\ (x+dx/2,\ y,\ z)\qquad a=a'$
$b'.\ (x,\ y-dy/2,\ z)\ \ b^{x}.\ (x,\ y+dy/2,\ z)\qquad b=b'$
$c'.\ (x,\ y,\ z-dz/2)\ \ c^{x}\ (x,\ y,\ z+dz/2).\qquad c=c'.$

Для удобства называемъ передніе площадки чрезъ a, b и c, а заднія — a', b' и c'. Одно изъ ур-ій моментовъ было написано въ такомъ видѣ:

$$\int \rho dw \left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \int (L + yZ' - zY')dw + \int (yZ_n - zY_n) ds.$$

Интегралы, какъ и раньше, замѣнимъ подынтегр-ми ф-іями. Послѣ соотвѣтствующихъ подстановокъ получаемъ: $\rho(y\,d^2z/dt^2 - z\,d^2y/dt^2)dw = (L + \underline{yZ'} - zY')dw$ $+ (y\underline{Z_x} - zY_x)a' + (y\underline{Z_{-x}} - zY_{-x})a + [(\underline{y} + dy/2)Z_y - zY_y]b' + [(\underline{y} - dy/2)Z_{-y} - zY_{-y}]b +$ $+ [y\underline{Z_z} - (z+dz/2)Y_z]c' + [y\underline{Z_{-z}} - (z - dz/2)Y_{-z}]c.$

Послѣ вынесенія въ правой части за скобки y изъ подчеркнутыхъ членовъ, получимъ въ скобкахъ:

$Z'dw + (Z_x + Z_{-x})a + (Z_y + Z_{-y})b + (Z_z + Z_{-z})c$, а это, по 3-му изъ ур-ій движенія (B) стр. 43, равно $\rho d^2z/dt^2 \cdot dw$. Поэтому подчеркнутые члены правой части сократятся съ членомъ $y\,d^2z/dt^2 dw$, находящимся въ лѣвой. Подобнымъ образомъ сократятся члены, содержащіе множителемъ z. Ур-іе моментовъ послѣ этого представится въ такомъ видѣ: $L dw + dy/2 . b(Z_y - Z_{-y}) - dz/2 . c(Y_z - Y_{-z}) = 0$. Мы имѣли соотношеніе (часто нами употреблявшееся) $Z_n + Z_{-n} = 0$, гдѣ Z_n — слагающая по оси Z, приложенная къ одной сторонѣ площадки, а Z_{-n} — равная Z_n — слагающая по оси Z, приложенная къ другой сторонѣ той же площадки. На этомъ основаніи $Z_y = -Z_{-y}$, $Y_z = -Y_{-z}$. Поэтому ур-іе моментовъ получаетъ видъ: $L dw + dy\, b Z_y - dz . c\, Y_z = 0$. Но $b dy = c dz = dw$. Ур-іе поэтому можно сократить на dw:

$$\left.\begin{array}{l} L' + Z_y - Y_z = 0, \\ M' + X_z - Z_x = 0, \\ N' + Y_x - X_y = 0 \end{array}\right\}$$

Аналогично получаются и другія два ур-ія. Итакъ мы получили ур-ія моментовъ для нашего элементарнаго параллел-да.

Вспомнимъ нѣсколько раньше написанныя ур-ія движенія центра параллел-да и сдѣлаемъ нѣкоторыя преобразованія. Во время деформаціи координата центровъ $x = x_0 + u$, гдѣ x_0 соотвѣтствуетъ начальному положенію центра, а $\underline{u}$ — перемѣщеніе, испытываемое центромъ по оси x овъ. Поэтому отъ времени зависитъ только $\underline{u}$, и ур-iе движенiя центра напишется такъ:

$$\left.\begin{aligned}\rho d^2x/dt^2 &= \rho d^2u/dt^2 = X' + \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}.\\ \rho \frac{d^2y}{dt^2} &= \rho d^2v/dt^2 = Y' + dY_x/dx + \frac{dY_y}{dy} + dY_z/dz\\ \rho d^2z/dt^2 &= \rho d^2w/dt^2 = Z' + dZ_x/dx + dZ_y/dy + \frac{dZ_z}{dz}\end{aligned}\right\} (A).$$

v и w - перемѣщенiе центра по направленiю осей Y и Z. Пойдемъ дальше. На площадку, перпендикулярную къ осямъ x, y, z, дѣйствуютъ силы

X_x, Y_x, Z_x, площ. $\perp x$. $\{$ X_x, Y_y, Z_z - силы <u>нормальныя</u>
X_y, Y_y, Z_y » » y $\}$ къ площадкамъ, а осталь-
$X_z, Y_z\ Z_z$ » » z. $\}$ ныя 6 силъ дѣйствуютъ въ

самихъ площадкахъ, т.е. эти силы <u>тангенцiальныя</u>. Обыкновенныя теорiи не разсматриваютъ внѣшнихъ силъ, дающихъ вращенiя L', M', N', т.е. принимаютъ ихъ равными 0. Въ этомъ случаѣ въ средѣ дѣйствуютъ только силы взаимодѣйствiя между частицами среды и силы изъ внѣшнихъ центровъ. Поэтому число тангенцiальныхъ силъ уменьшится вдвое, т.к. на основанiи ур-iй моментовъ имѣемъ $Z_y = Y_z$; $X_z = Z_x$, $Y_x = X_y$.

Кромѣ этихъ ур-iй мы имѣемъ еще ур-iя, выражающiя связь силы, дѣйствующей на к-н. площадку, съ 3-мя силами, дѣйствующими на три взаимно-перпенд-ыя площадки, проходящiя черезъ центръ, нами выбранный. Эти ур-iя слѣдующiя:

$X_n = X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma$. $\{$ α, β и γ суть кос-ы уг-
$Y_n = Y_x\alpha + Y_y\beta + Y_z\gamma$ $\}$ ловъ, образуемыхъ нор-
$Z_n = Z_x\alpha + Z_y\beta + Z_z\gamma$. $\}$ малью n съ осями коор-

динатъ. Сила вообще дѣйствуетъ не по нор-

мали, и составляетъ съ ней нѣкоторый уголъ.
Тогда имѣемъ связь:

$$X_n = P_n \cos(P_x);$$
$$Y_n = P_n \cos(P_y)$$
$$Z_n = P_n \cos(P_z)$$

Посмотримъ, можетъ-ли площадка имѣть такое направленіе, при которомъ дѣйствующая на нее сила къ ней нормальна. Если сила направлена по нормали, имѣемъ: $X_n = P\alpha$; $Y_n = P\beta$, $Y_n = P\gamma$; тогда написанныя выше ур-ія примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} (X_x - P)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma &= 0; \\ Y_x\alpha + (Y_y - P)\beta + Y_z\gamma &= 0 \\ Z_x\alpha + Z_y\beta + (Z_z - P)\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} (X) \quad \Big| \; \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Эти ур-ія имѣютъ сходство съ тѣми ур-ями, кот. мы писали для извлеченія осей поверхности удлинненій. Методъ опредѣленія P, α, β, γ тотъ, что мы употребляли для опредѣленія главныхъ удлинненій и ихъ направл-ій. Для P получаемъ такое же кубическое ур-іе въ кот. вм. δ, δ_z и пр. стоятъ X_x, Y_y и пр. Слѣдовательно, для P получается три дѣйствительныхъ значенія: P_1, P_2 и P_3. Направленія этихъ силъ взаимно-перпендикулярны. Итакъ, въ каждой точкѣ нашей измѣненной системы существуютъ 3 взаимно-перпенд. площадки, на кот. дѣйствуютъ только нормальныя силы, т. е. тан ~~потенці~~альныхъ силъ на нихъ нѣтъ. Если возьмемъ за оси коор-тъ направленія силъ P_1, P_2, P_3, т. е. нормали къ упомянутымъ площадкамъ, то получимъ упрощенныя формулы. Въ ур-іи (X) можемъ вычеркнуть всѣ тангенціальныя силы. Тогда эти ур-ія превращаются въ слѣдующія: $X_n = P_1\alpha$; $Y_n = P_2\beta$; $Z_n = P_3\gamma$.

Разсмотримъ обѣ части этихъ ур-ій послѣдовательно на P_1, P_2 и P_3, и взявъ въ квадратъ, сложимъ. Тогда, зная, что $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, получимъ: $\left(\frac{X_n}{P_1}\right)^2+\left(\frac{Y_n}{P_2}\right)^2+\left(\frac{Z_n}{P_3}\right)^2=1$ .... (a).

X_n, Y_n, Z_n — суть координаты оконечности прямой, которая имѣетъ направленіе и величину силы P_n, дѣйствующей на площадку. Другая оконечность лежитъ въ центрѣ площадки, мѣняя направленіе площадки, измѣняемъ и направленіе дѣйствующей на нее силы. Мы видимъ при этомъ, что оконечности этихъ силъ P_n образуютъ собою поверхность трехоснаго эллипсоида a. [illegible]

Теперь намъ предстоитъ вопросъ, какъ найти силу, дѣйствующую на данную площадку, и другой вопросъ, какъ найти площадку, на к-рую дѣйствуетъ данная сила. — Посмотримъ поверхность, имѣющую общій центръ съ поверхностью (a). Пусть ур-іе этой поверх-и имѣетъ видъ:

$$X^2/P_1+Y^2/P_2+\frac{Z^2}{P_3}=\pm 1 \;\ldots\ldots\; (b).$$

Пусть площадка дана ур-іемъ $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ .. (C). Проведемъ къ поверхности (b) касательную плоскость, параллельную площадкѣ (C). Ур-іе касательной плоскости будетъ имѣть такой видъ:

$\frac{XX'}{P_1}+\frac{YY'}{P_2}+\frac{ZZ'}{P_3}=\pm 1$. Cos-и угловъ ея нормали съ осями коор-тъ выразятся: $\alpha=\frac{X'/P_1}{\sqrt{(X'/P_1)^2+(Y'/P_2)+(Z'/P_3)^2}}$;

Умножая обѣ части этихъ ур-ій соотвѣтственно на P_1, P_2, P_3, и помня, что $P_1\alpha=X_n$, $P_2\beta=Y_n$, $P_3\gamma=Z_n$,

$\beta=\frac{Y'/P_2}{\sqrt{\Sigma}}$.

$\gamma=Z'/P_3/\sqrt{\Sigma}$.

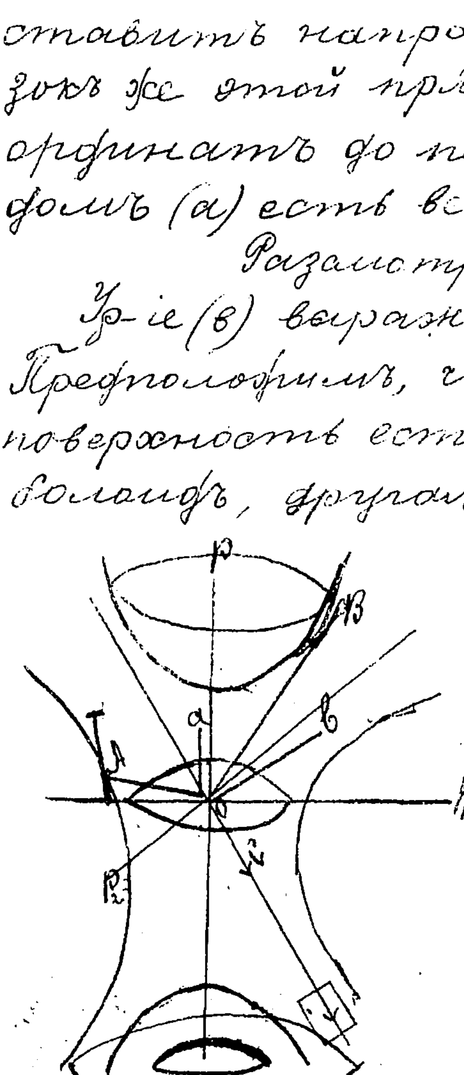
имѣемъ отсюда:

$\sqrt{\left(\frac{X'}{P_1}\right)^2+\left(\frac{Y'}{P_2}\right)^2+\left(Z'/P_2\right)^2}=\frac{X'}{X_n}=Y'/Y_n=\frac{Z'}{Z_n}$. Отсюда видно, что точка X_n, Z_n, Y_n есть точка пересѣченія съ поверхностью (a), прямой, проходящей чрезъ начало коор-тъ и черезъ точку касанія касательной плоскости къ поверх=

ности (в), проведенной параллельно данной площадкѣ.

Итакъ, если хотимъ отыскать силу, дѣйствующую на какую-нибудь площадку, мы должны къ поверхности (в) провести касательную плоскость, параллельную данной площадкѣ; соединить центръ поверхности съ точкой касанія прямою. Она представитъ направленіе силы. Отрѣзокъ же этой прямой отъ начала координатъ до пересѣченія съ эллипсоидомъ (а) есть величина силы.

Разсмотримъ частный случай. Ур-іе (в) выражаетъ двѣ поверхности. Предположимъ, что $P_3 = -$; тогда одна поверхность есть однополый гиперболоидъ, другая - двуполый.



Силы, направленіе которыхъ встрѣчаетъ поверхность двуполаго гиперболоида, суть силы натяженія, а однополаго - давленія. На площадкахъ, касающихся асимптотическаго конуса, могутъ быть только тангенціальныя силы. Для другихъ направ-

Литогр. Общ. физмат. пол. книгъ.

ленія силы дѣйствуютъ наклонно къ площадкамъ. Чтобы по направленію силы найти площадку, къ которой она приложена, проводимъ черезъ точку пересѣченія направленія силы касательную плоскость. Плоскость, параллельная этой касательной плоскости и проходящая черезъ начало O, есть искомая. Проводимъ плоскость касательно къ нашимъ поверхностямъ параллельно площадкѣ (a). Такая плоскость (A) можетъ быть проведена только къ однополому гиперболоиду; потому AO есть направленіе силы натяженія на площадку a. OB есть давленіе на площадку (в). На площадки C дѣйствуютъ силы, лежащія въ нихъ же самихъ, т.е. тангенціальныя (по образующимъ асимптотическаго конуса).

§1. Упругія измѣняемыя системы.

Теперь намъ надо связать деформацію съ силами, ее производящими. Мы остановимся на упругихъ измѣняемыхъ системахъ. Такія системы имѣютъ то свойство, что развиваютъ силы, старающіяся уничтожить деформацію, т.е. возвратить систему въ первоначальное положеніе; какъ только исчезаютъ силы, производящія деформацію, — исчезнуть и деформаціи. Отыщемъ въ разсматриваемомъ случаѣ зависимость упругихъ силъ отъ вызывающихъ ихъ деформацій.

Самая простая зависимость — линейная. У насъ деформаціи характеризовались тремя удлиненіями d_1, d_2, d_3 вдоль осей координатъ и тремя скольженіями $2g_1, 2g_2, 2g_3$ (6 коэффиціентовъ деформаціи). Такъ какъ мы имѣемъ шесть упругихъ силъ — три нормальныя и три тангенціальныя, то въ общемъ случаѣ линейныя зависимости шести силъ отъ шести коэффиціентовъ деформацій будутъ содержать 36 коэффиціентовъ; или будетъ характеризоваться измѣняемая упругая среда самаго общаго свойства. Искомыя зависимости не будутъ содержать членовъ независимыхъ отъ деформацій, такъ какъ силы должны исчезать съ исчезновеніемъ деформацій.

Кромѣ такихъ упругихъ средъ можно себѣ представить среды съ внутреннимъ треніемъ. Силы будутъ зависѣть не только отъ размѣровъ деформацій, но и отъ времени, въ теченіе котораго онѣ совершаются. Въ такихъ средахъ имѣютъ мѣсто, напримѣръ, явленія абсорбціи — поглощеніе энергіи средой.

Наше вниманіе займетъ теперь сведеніе общихъ зависимостей къ простѣйшимъ.

Упругія тѣла можно классифицировать, вводя все большія и большія ограниченія относительно ихъ свойствъ.

§ 2. Представимъ себѣ, что среда деформируется. По истеченіи безконечно-малаго элемента времени центръ нашего параллелепипеда получитъ перемѣщенія $\delta u, \delta v, \delta w$ (параллельно осямъ координатъ). Если du/dt - скорость перемѣщенія частицъ по оси x, то очевидно

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \frac{du}{dt}dt \\ \delta v &= \frac{dv}{dt}dt \\ dw &= \frac{dw}{dt}dt \end{aligned}\right\}$$

Для перемѣщенія центра параллелепипеда мы уже получили ур-ія (A). Изъ нихъ мы составимъ слѣдующее выраженіе, умножая du, dv, dw и складывая:

$$\iiint \rho\left(\frac{d^2u}{dt^2}\delta u + \frac{d^2v}{dt^2}dv + \frac{d^2w}{dt^2}dw\right)d\omega =$$

$$= \iiint (X'\delta u + Y'\delta v + Z'\delta w)\,d\omega +$$

$$+ \iiint \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}\right)\delta u \\ &\left(\frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz}\right)\delta v \\ &\left(\frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz}\right)\delta w \end{aligned}\right\} d\omega \quad \ldots\ldots (A')$$

Вмѣсто $\delta u, \delta v, \delta w$ вставимъ ихъ значенія, записанныя нами выше.

Въ лѣвой части подъ знаками интеграловъ получимъ

$$\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du}{dt}+\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dv}{dt}+\frac{d^2w}{dt^2}\frac{dw}{dt}\Big)dt,$$

а это очевидно равняется

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]dt.$$

Выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ будетъ представлять собою квадратъ скорости движенія точки, а все вмѣстѣ — ½ приращенія квадрата этой скорости за безконечно-малый промежутокъ времени. Теперь легко видѣть, что лѣвая часть написаннаго ур-ія выражаетъ прибыль живой силы внутри разсматриваемой части объема; обозначимъ его черезъ δV. Первый членъ второй части представитъ работу внѣшнихъ силъ при происходящемъ перемѣщеніи. Обозначимъ ее черезъ δL. Послѣдній членъ преобразуемъ при помощи интеграціи по частямъ.

$d\omega = dxdydz.$

$$\iint dydz\int\frac{dX_x}{dx}\delta u\,dx=\iint dydz\left[X_x\delta u-\int X_x\frac{d\delta u}{dx}dx\right]=$$

$$=\iint\Big(X_x\delta u\,ds\,cs(nx)\Big]-\iiint X_x\frac{d\delta u}{dx}dxdydz.$$

Послѣднее слѣдуетъ изъ того, что $dydz$ есть проэкція на плоскость yz элемента ds поверхности тѣла, иначе $dydz = ds\cos(nx)$, гдѣ n есть внѣшнія нормали.

По такому типу можно преобразовать всѣ части послѣдняго члена.

$\iint (X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)) \delta u\, ds$ – это есть не что иное, какъ проэкція на ось x-овъ внѣшней силы P_n, приложенной къ площадкѣ ds поверхности, т. е. слагающая этой силы X_n.

Такимъ образомъ получимъ:

$\iint (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) ds$ – работу внѣшнихъ давленій или натяженій, приложенныхъ къ поверхности.

Обозначимъ ее черезъ dL'.

Остается еще принять во вниманіе интегралы 2 вида

$$\iiint X_x \frac{d\delta u}{dx} dx\,dy\,dz.$$

Они даютъ выраженіе

$$-\iiint \left\{ \begin{aligned} &\left(X_x \frac{d\delta u}{dx} + X_y \frac{d\delta u}{dy} + X_z \frac{d\delta u}{dz}\right) + \\ &+\left(Y_x \frac{d\delta v}{dx} + Y_y \frac{d\delta v}{dy} + Y_z \frac{d\delta v}{dz}\right) + \\ &+\left(Z_x \frac{d\delta w}{dx} + Z_y \frac{d\delta w}{dy} + Z_z \frac{d\delta w}{dz}\right) + \end{aligned} \right\} d\omega \quad \ldots \quad (8)$$

Это выраженіе можно значительно упростить, переставивъ знаки δ и d, на что имѣемъ право, такъ какъ δ относится къ измѣненіямъ по времени, а d въ предъидущемъ выраженіи – къ координатамъ начальныхъ положеній точекъ. Припомнивъ, что $X_y = Y_x$, $du/dx = g_1$ и $du/dy + \frac{dv}{dx} = 2g_3$ и т. д.

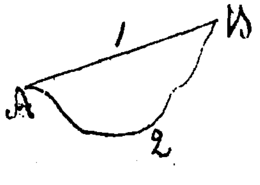
оно приметъ видъ

$$-\iiint d\omega \{ X_x \delta\partial_1 + Y_y \delta\partial_2 + Z_z \delta\partial_3 + 2X_y \delta g_3 + 2X_z \delta g_2 + 2Y_z \delta g_1 \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon')$$

Въ правой части ур-ія (A'), выражающаго собою приростъ живой силы системы, недостаетъ только работы внутреннихъ силъ. Очевидно, что она будетъ представляться только что полученнымъ членомъ.

Такъ какъ мы принимаемъ внутреннія силы консервативными, то отрицательное измѣненіе внутренней работы будетъ обозначать собою приростъ потенціальной энергіи системы, который долженъ равняться разности значеній энергіи при двухъ различныхъ размѣщеніяхъ нашей системы. Этотъ приростъ $\delta Э$ долженъ быть полнымъ дифференціаломъ, взятымъ отъ нѣкоторой функціи коэффиціентовъ деформаціи $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, $2g_1, 2g_2, 2g_3$.

Такое положеніе было высказано еще въ 1837 году Англійскимъ физикомъ Гриномъ, исходившимъ изъ принципа, что ограниченная матеріальная система не можетъ быть источникомъ безпредѣльной работы.



Работы внутреннихъ силъ системы на пути AB не должны зависѣть отъ харак тера перехода тѣла изъ одного состоянія въ другое. Въ противномъ случаѣ мы могли бы подобрать два такихъ пути, на которыхъ работа была бы не одинакова. Въ такомъ случаѣ мы могли бы составить замкнутый циклъ превращеній и при этомъ затрачивать работу на той части цикла А1В, на которой работа внутреннихъ силъ меньше, а затѣмъ при возвращеніи тѣла къ первоначальному состоянію по другой части мы выиграли бы нѣкоторое количество работы, причемъ тѣло вернулось бы къ прежнему виду. Повторяя такой процессъ, мы могли бы получать работу изъ ничего въ безпредѣльномъ количествѣ. Такъ как это невозможно, то мы должны принять, что работа внутреннихъ силъ не зависитъ отъ характера превращеній, а только отъ начальнаго и конечнаго состоянія системы; отсюда и слѣдуетъ, что приростъ энергіи для безконечно малаго измѣненія состоянія системы долженъ быть полнымъ дифференціаломъ отъ нѣкоторой функціи деформаціи.

Если мы возьмемъ безконечно малый объемъ, то для него приростъ энергіи dF, отнесенный къ единицѣ объема будетъ по выраженію (E')

$$dF = X_x\delta d_1 + Y_y\delta d_2 + Z_z\delta d_3 + 2Y_z\delta g_1 + 2X_z\delta g_2 + 2X_y\delta g_3 .$$

Знакъ измѣненъ въ противный, такъ какъ измѣненіе энергіи противоположно приросту работы внутреннихъ силъ.
Но на основаніи только что сказаннаго dF должно быть полнымъ дифференціаломъ отъ ∂, g, …; слѣд.

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \partial_1}\delta\partial_1 + \frac{\partial F}{\partial \partial_2}\delta\partial_2 + \frac{\partial F}{\partial \partial_3}\delta\partial_3 +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial g_1}\delta g_1 + \frac{\partial F}{\partial g_2}\delta g_2 + \frac{\partial F}{\partial g_3}\delta g_3 .$$

Сравнивая коэффиціенты во вторыхъ частяхъ, получаемъ ф-ціи силъ упругости

$$X_x = \frac{\partial F}{\partial \partial_1};\ Y_z = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial g_1}\ \dots$$

Отыскиваемое нами выраженіе потенціала упругихъ силъ не можетъ содержать постоянныхъ членовъ и членовъ съ первыми степенями коэффиціентовъ деформаціи, т. к. эти послѣдніе дали бы въ выраженіяхъ силъ постоянныя величины, иными словами, силы не зависѣли бы исключительно отъ видовъ деформаціи. На основаніи этого выраженіе потенціала въ общемъ видѣ будетъ содержать члены, представляющіе всевозможныя соединенія второго порядка изъ коэффиціентовъ деформаціи, именно

$$\partial_1^2,\ \partial_1\partial_2,\ \partial_1\partial^3,\ \partial_1 g_1,\ \partial_1 g_2,\ \partial_1 g_3$$

$$\partial_2^2,\ \partial_2\partial_3,\ \partial_2 g_1,\ \partial^2 g_2,\ \partial_2 g_3$$

$$b_3^2,\ b_3 g_1,\ b_3 g_2,\ b_3 g_3$$
$$g_1^2,\ g_1 g_2,\ g_1 g_3$$
$$g_2^2\ \ g_2 g_3$$
$$g_3^2$$

Число такихъ членовъ 21. Если бы мы взяли тѣло ассимметричное, напр. кристаллъ ассимметрической системы, то его упругія свойства характеризовались бы именно такимъ выраженiемъ съ 21 членомъ. Мы же займемся упрощенiемъ этого выраженiя, вводя все большую и большую степень симметрiи въ упругихъ свойствахъ разсматриваемаго тѣла; большинство членовъ тогда исчезнетъ.

Допустимъ, что каждый элементъ среды, гдѣ бы онъ ни былъ, воспроизводитъ одни и тѣ же упругія свойства. Такiя тѣла называются однородными. Только такiя тѣла мы и будемъ имѣть въ виду.

Коэффицiенты, на которые умножаются приведенныя выше выраженiя деформацiй въ выраженiи F, зависятъ отъ выбора осей координатъ; потому при перемѣнѣ осей величина F сохраняется, но видъ ея вообще мѣняется. Здѣсь мы почерпаемъ прiемъ для упрощенiя вида F въ тѣлахъ съ опредѣленными свойствами. Послѣднiя мы можемъ характеризовать именно неизмѣняемостью вида функцiи

F при опредѣленныхъ перемѣнахъ осей.

Предположимъ, что свойства нашей среды симметричны относительно плоскостей параллельныхъ плоскости xy; она будетъ тогда плоскостью симметріи.

При перемѣнѣ z на $-z$ коэффиціенты и видъ выраженія F должны остаться тѣ же; прежнее перемѣщеніе по оси z — w, которое мы считали положительнымъ, измѣнитъ свой знакъ. Обращаясь къ коэффиціентамъ деформаціи, мы увидимъ, что d_1, d_2, d_3 не измѣнятъ ни своей величины, ни знака, но g_1 и g_2 измѣнятся въ $-g_1$ и $-g_2$. Такимъ образомъ въ общемъ выраженіи для F члены, числомъ 8 (членъ g_1g_2 не мѣняетъ знака), содержащіе первыя степени g_1 и g_2, должны исчезнуть, иначе F, сохраняющая, по условію, при указанной перемѣнѣ прежніе коэффиціенты, мѣняла бы свою величину, что невозможно, такъ какъ деформація остается того же самого. Итакъ, упругія свойства среды, обладающей одной плоскостью симметріи, представляются выраженіемъ, содержащимъ 13 членовъ (21-8).

Сюда относятся кристаллы моносимметрической системы, обладающей одною плоскостью симметріи, содержащей двѣ косо направленныя другъ къ другу кристаллографическія оси. Третья ось, перпендикулярна къ плоскости первыхъ двухъ.

Идемъ дальше въ нашемъ упрощеніи. Предполагаемъ, что кромѣ плоскости xy и плоскости xz есть плоскость симметріи (2 взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи). Функція F не должна измѣнять своего вида и величины отъ перемѣны y на $-y$. Измѣняютъ свои знаки v, g_1 и g_3, что влечетъ за собою исчезновеніе еще 4 членовъ $(\partial_1 g_3, \partial_2 g_3, \partial_3 g_3, g_1 g_2)$. Остается всего 9 членовъ. Такимъ образомъ вычеркнуты всѣ члены, содержащіе первыя степени коэффиціентовъ скольженія.

Легко видѣть, что наша среда, обладающая двумя взаимно-перпендикулярными плоскостями симметріи, должны быть симметричной и по отношенію къ 3ей плоскости yz; дѣйствительно, ни одинъ членъ въ упрощенномъ выраженіи не будетъ мѣнять своего знака при замѣнѣ x черезъ $-x$, ибо скольженія исчезли. Отсюда заключаемъ, что если въ однородномъ тѣлѣ существуютъ двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи, то необходимо должна существовать и 3ья къ нимъ перпендикулярная.

Такими свойствами обладаютъ кристаллы ромбической системы; у нихъ три взаимно-перпендикулярныхъ кристаллографическихъ оси-лежащія на пересѣченіи плоскостей симметріи.

Такимъ образомъ потенціалъ упругихъ силъ для кристалловъ ромбической системы имѣетъ видъ

$$F = a_{11}\partial_1^2 + a_{22}\partial_2^2 + a_{33}\partial_3^2 +$$
$$+ a_{12}\partial_1\partial_2 + a_{23}\partial_1\partial_3 + a_{13}\partial_2\partial_3 + b_1 g_1^2 + b_2 g_2^2 + b_3 g_3^2.$$

Допустимъ, что изъ трехъ осей мы имѣемъ двѣ равносвойственныхъ, т.е. мѣняя одну ось на другую, мы не мѣняемъ свойствъ среды. Плоскости, перпендикулярныя къ такимъ осямъ, будемъ называть тоже равносвойственными. По отношенію къ ним свойства тѣлъ одинаковы. Пусть оси x и y равносвойственны, т.е. F не мѣняется отъ замѣны x y-мъ и y x-омъ. Тогда ∂ перейдетъ въ ∂_2, ∂_2 въ ∂_1, g_1 въ g_2 и g_2 въ g_1. Но чтобы при этомъ никакихъ перемѣнъ не произошло, необходимо

$$a_{11} = a_{22},\ a_{13} = a_{23} \text{ и } b_1 = b_2.$$

Получаемъ

$$F = a_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + a_{33}\partial_3^2 + a_{12}\partial_1\partial_2 +$$
$$+ a_{13}(\partial_1\partial_3 + \partial_2\partial_3) + b_1(g_1^2 + g_2^2) + b_3 g_3^2.$$

Таковы кристаллы тетрагональной системы.

Пусть теперь всѣ три оси равносвойственны или всѣ три плоскости симметріи равносвойственны (кристаллы правильной системы — каменная соль, квасцы, плави ковый шпатъ, закись мѣди, и др).

Въ этомъ случаѣ $a_{11}=a_{22}=a_{33}$;

$$a_{12}=a_{13}=a_{22};$$

$$b_1=b_2=b_3.$$

$$F=a_{11}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)+a_{12}(\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_3+\partial_2\partial_3)+b_1(g_1^2+g_2^2+g_3^2).$$

или $F=a(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)+b(\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_3+\partial_2\partial_3)+c(g_1^2+g_2^2+g_3^2)$.

Потенціалъ упругихъ силъ для правильной системы сводится къ выраженію съ 3мя коэффиціентами.

Остается сдѣлать послѣднее упрощеніе, перейти къ тѣламъ изотропнымъ. Здѣсь F остается безъ измѣненія, какъ бы мы не выбрали оси координатъ.

§3. Уравненія движенія въ упругой изотропной средѣ.

Для кристалловъ правильной системы мы нашли:

$$F=a(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)+b(\delta_1\delta_2+\delta_1\delta_3+\delta_2\delta_3)+c(g_1^2+g_2^2+g_3^2).$$

Мы имѣли также коэффиціенты въ нашемъ кубическомъ уравненіи.

При $D^2-(\delta_1+\delta_2+\delta_3)\dots$ (1).

Этотъ коэффиціентъ долженъ оставаться независимымъ отъ выбора осей координатъ, ибо, взятый съ противнымъ знакомъ, онъ равенъ суммѣ корней нашего уравненія т.е. суммѣ главныхъ удлинненій, слѣдовательно его квадратъ тоже долженъ оставаться неизмѣннымъ: это есть кубическое расширеніе. Другой коэффиціентъ кубическаго ур-ія есть:

$$\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_3+\partial_2\partial_3-g_1^2-g_2^2-g_3^2+\dots \quad (2).$$

Это есть функція тоже неизмѣняющаяся съ перемѣной осей координатъ, ибо представляетъ сумму произведеній корней нашего уравненія, т.е. главныхъ удлинненій, которыя остаются тѣми же самыми, какія бы оси координатъ мы не взяли.

Если теперь мы функцію (2) удвоимъ и вычтемъ изъ квадрата функціи (1), то получимъ функцію:

$$\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2+2(g_1^2+g_2^2+g_3^2),$$

которая очевидно, тоже должна быть функціей независящей отъ выбора системы координатныхъ осей.

Займемся теперь преобразованіемъ выраженія потенціала.

Положимъ, что

$$c = 2\mu;\ b = \lambda;\ a = \lambda/2+\mu+k;$$

внесемъ эти величины въ нашу функцію F, которая тогда представится въ видѣ:

$$F=\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+k\right)(\partial_2^2+\partial_1^2+\partial_3^2)+$$
$$+\lambda(\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_3+\partial_1\partial_3)+2\mu(g_1^2+g_2^2+g_3^2).$$

Въ этомъ выраженіи сдѣлаемъ слѣдующія преобразованія: сумма квадратовъ удлинненій, умноженная на $\lambda/2$ + сумма попарныхъ произведеній удлинненій, умноженная на λ, даютъ $\lambda/2$ полнаго квадрата отъ суммы удлинненій.

Затѣмъ соберемъ члены съ μ и k. При μ будетъ множителемъ сумма квадратовъ удлиненій + сумма удвоенныхъ квадратовъ g_1, g_2 и g_3. Такимъ образомъ

$$F = \frac{\lambda}{2}(\partial_1+\partial_2+\partial_3)^2 + \mu(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2+2g_1^2+2g_2^2+2g_3^2) + k(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2).$$

Мы только что видѣли, что функціи при $\lambda/2$ и μ не мѣняются съ измѣненіемъ осей координатъ, и такимъ образомъ въ нашемъ выраженіи будетъ измѣняться только множитель при k. Подъ изотропной средой мы разумѣемъ такую, свойства которой одинаковы во всѣхъ направленіяхъ. Поэтому потенціалъ упругихъ силъ долженъ сохранить свой видъ, т. е. коэффиціенты и величины, какъ бы мы не измѣнили систему координатъ. Слѣдовательно членъ съ множителемъ k не долженъ входить въ потенціалъ изотропной среды. Такимъ образомъ упругія измѣненія въ изотропной средѣ характеризуются двумя коэффиціентами λ и μ.

§4. Мы имѣемъ для выраженія нормальной силы:

$$X_x = \frac{dF}{d\partial_1} = \lambda(\partial_1+\partial_2+\partial_3) + 2\mu\frac{du}{dx}.$$

Сумма удлиненій $(\partial_1+\partial_2+\partial_3)$ есть кубическое расширеніе Θ.

такимъ образомъ

$$X_x = \lambda\Theta + 2\mu\frac{du}{dx}.$$

Аналогично

$$Y_y = \lambda\Theta + 2\mu\frac{dv}{dy}$$

$$Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\frac{dw}{dz}$$

Такъ представляются нормальныя силы для изотропной среды; для тангенціальныхъ силъ мы получимъ:

$$X_y = \frac{1}{2}\frac{dF}{dg_3}.$$

Такъ какъ $g_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)$, то, дифференцируя, находимъ окончательно:

$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right).$$

По аналогіи напишемъ выраженія и другихъ упругихъ тангенціальныхъ силъ:

$$X_z = Z_x = \mu\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)$$

$$Z_y = Y_z = \mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right).$$

§ 5. Измѣняемая система, въ которой тангенціальныя силы отсутствуютъ называется идеальной жидкостью. Итакъ мы получимъ выраженія для упругихъ силъ въ жидкой средѣ, если положимъ тангенціальныя силы равными 0 для

Литогр. Общ. распр. полезн. книгъ.

ваной деформаціи, что возможно только при $\mu_1 = 0$. Въ этомъ случаѣ всѣ нормальныя силы сдѣлаются равными $\lambda\theta$. Такимъ образомъ въ жидкой средѣ всѣ упругія силы нормальны, равны между собою и пропорціональны кубическому расширенію.

§6. Мы до сихъ поръ не принимали во вниманіе измѣненія температуры въ средахъ. Поэтому наши формулы справедливы только для двухъ крайнихъ случаевъ. Во первыхъ, когда деформація идетъ очень медленно; тогда мы можемъ предполагать, что температура успѣваетъ выравниваться и процессъ будетъ изотермическій, и во вторыхъ, когда деформація совершается весьма быстро, и въ такомъ быстромъ, адіабатномъ процессѣ коэффиціенты λ и μ_1 будутъ иные. Такимъ образомъ коэффиціенты λ и μ_1 могутъ быть изотермическіе и адіабатные. Предметомъ опытнаго опредѣленія служатъ пока коэффиціенты изотермическіе.

§7. Составимъ уравненія движенія въ упругой средѣ.

Внѣшнія силы, дѣйствующія на элементъ объема на первыхъ порахъ, отбросимъ. Мы имѣемъ:

$$\rho \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}.$$

Дѣлая подстановку и дифференцирование, получимъ:

$$\rho \frac{d^2u}{dx^2} = \lambda \frac{d\theta}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dx^2} + \mu \frac{d^2u}{dx^2} + $$
$$+ \mu\left[\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dxdy}\right] + \mu\left[\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2w}{dxdz}\right].$$

Обозначая сумму вторыхъ производныхъ отъ u по координатамъ черезъ Δu и сумму удлиненій $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}$ — черезъ кубическое расширеніе Θ, находимъ:

$$\rho \frac{d^2u}{dt^2} = (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u$$

Аналогично напишемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\rho^2 \frac{d^2u}{dt^2} = (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta v \quad \text{и} \\ &\rho \frac{d^2w}{dt^2} = (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta w \end{aligned}\right\} \ldots (\beta).$$

§ 8. Для жидкой упругой среды получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\rho \frac{d^2u}{dt^2} = \lambda \frac{d\Theta}{dx}; \\ &\rho \frac{d^2v}{dt^2} = \lambda \frac{d\theta}{dy} \\ &\rho \frac{d^2w}{dt^2} = \lambda \frac{d\theta}{dz} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (x).$$

такъ какъ $\mu = 0$.

Мы приводимъ параллельно и уравненій по упругой и жидкой средамъ, чтобы отличить характеръ періодическихъ движеній, съ которыми мы будемъ имѣть дѣло въ твердыхъ упругихъ средахъ, упругимъ свойствамъ которыхъ приравниваются свойства эфира.

Дифференцируя первое изъ уравненій (α) по y, второе по x, находимъ, такъ какъ x и y не зависятъ отъ координатъ начальной точки:

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)=0 \quad \ldots \quad (a)$$

Подобнымъ же образомъ

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)=0 \quad \ldots \quad (b)$$

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right)=0 \quad \ldots \quad (c)$$

Величины, стоящія въ скобкахъ, по предъидущему, представляютъ удвоенныя вращенія элемента объема соотвѣтственно около осей x, y и z т.е. $2\xi_1$, $2\xi_2$ и $2\xi_3$.

Такъ какъ вторыя производныя равны нулю, то слѣдовательно, ускореній вращеній нѣтъ.

Итакъ, если жидкость имѣетъ вихревыя движенія, то при упругихъ деформаціяхъ они не ускоряются, а слѣдовательно и не вліяютъ на деформаціи; поэтому мы можемъ ихъ не принимать во вниманіе, то есть, допустить напередъ, что вращеній нѣтъ.

Потому мы полагаемъ $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$, или

$$\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0$$

$$\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=0$$

$$\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=0$$

Послѣднія равенства показываютъ, что u, v, w должны быть производными по координатамъ отъ нѣкоторой функціи, т. е.

$$u=\frac{dF}{dx};\quad v=\frac{dF}{dy} \text{ и } w=\frac{dF}{dz}$$

Эта функція F въ гидродинамикѣ называется потенціаломъ скоростей; мы будемъ называть ее волновою функціей.

Легко замѣтить, что

$$\Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\Delta F, \text{ т. е.}$$

суммѣ вторыхъ производныхъ отъ F по координатамъ.

Внесемъ вмѣсто $\Theta - \Delta F$ въ ур-ія (α) и получимъ:

$$\frac{d}{dx}\left(\rho\frac{d^2F}{dt^2}\right)=\lambda\frac{d}{dx}\Delta F$$ и~~ли~~

$$\frac{d}{dy}\left[\rho\frac{d^2F}{dt^2}-\lambda\Delta F\right]=0$$ и

$$\frac{d}{dz}\left[\rho\frac{d^2F}{dt^2}-\lambda\Delta F\right]=0.$$

Послѣднія три уравненія удовлетворяются слѣдующимъ положеніемъ:

$$\frac{d^2F}{dt^2}=C\Delta F, \text{ гдѣ } C=\frac{\lambda}{\rho}.$$

Мы увидимъ, что къ такого же рода волновой функціи приведутъ насъ и уравненія (β). Выводы этого б будутъ строго доказаны въ нижеслѣдующемъ.

§ 4. Воспользуемся пріемомъ Клебша для интегрированія уравненій упругости.

Пусть въ нашей средѣ произошла упругая деформація, вполнѣ опредѣленнаго характера, такъ что намъ извѣстны перемѣщенія u v и w. Представимъ ихъ такъ:

$$u = \frac{d\Phi}{dx} + u_1 \quad . \; . \; . \; (I)$$

$$v = \frac{d\Phi}{dy} + v_1 \quad . \; . \; . \; II.$$

$$w = \frac{d\Phi}{dz} + w_1 \quad . \; . \; . \; III.$$

Такъ какъ вмѣсто трехъ функцій мы вводимъ четыре, то можемъ прибавить еще слѣдующее условіе:

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{dv_1}{dy} + \frac{dw_1}{dz} = 0 \ldots \underline{IV}.$$

Этими четырмя уравненіями опредѣляются всѣ четыре функціи. Дѣйствительно, если продифференцируемъ уравненія I, II, III и сложимъ, то получимъ:

$$\Theta = \Delta\Phi, \quad . \; \ldots (\xi).$$

т. е. суммѣ вторыхъ производныхъ отъ Φ. Интегрируя это урав-іе, находимъ φ; подставляя его въ I, 2 и III уравненія, опредѣлимъ u, v, w. Слѣдовательно наше предположеніе возможно.

Подставляя теперь значенія u, v и w изъ уравненій I, II и III въ уравненія (a)(b) и (c), получаемъ:

$$\rho\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)+\rho\frac{d^2u}{dt^2}=(\lambda+\mu)\frac{d}{dx}(\Delta\varphi)+$$
$$+\mu\frac{d}{dx}(\Delta\varphi)+\mu\Delta u.$$

Это ур-іе мы можемъ переписать такъ:

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}-\mu\Delta u=\frac{d}{dx}\left\{-\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(\lambda+2\mu)\Delta\varphi\right\}$$

Раздѣливъ обѣ части на ρ, которое мы считаемъ неизмѣняемымъ(*), и обозначая $\frac{\mu}{\rho}$ черезъ ω^2 и $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ черезъ Ω^2, получимъ наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d^2u}{dt^2}-\omega^2\Delta u+\frac{ds}{dx}=0,$$

гдѣ $s=\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\Omega^2\Delta\varphi$.

Мы можемъ дополнить ур-ія I, II и III, присоединивъ выраженія, равныя нулю такого вида:

(*) Мы разсматриваемъ деформацію очень малую; поэтому производныя отъ перемѣщеній и самыя перемѣщенія малы. Вслѣдствіе этого плотность измѣняется мало; т.-к. она является множителемъ у производныхъ по координатамъ, что про-

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dx}+u''&=0.\\ \frac{dQ}{dy}+v''&=0\\ \frac{dQ}{dz}+w''&=0 \end{aligned}\right\}\ldots(A).$$

гдѣ u'', v'' и w'' и Q суть функціи, удовлетворяющія этимъ новымъ условіямъ. Такъ какъ въ (A) имѣемъ 4 функціи, связанныя тремя уравненіями, то можемъ прибавить еще условіе:

$$\frac{du''}{dx}+\frac{dv''}{dy}+\frac{dw''}{dz}=0$$

Функціи u'', v'' и w'' суть функціи координатъ и времени.

Написанныя условія опредѣляютъ ихъ свойства по отношенію къ координатамъ и въ нихъ не внесено ничего такого, чтобы опредѣляло свойства этихъ функцій по отношенію ко времени. Дифференцируя и складывая ур-ія (A), получаемъ

$$\Delta Q=0, \quad \text{а затѣмъ}$$
$$\Delta u''=0, \; \Delta v''=0, \; \Delta w''=0.$$

Въ виду этого, мы, не измѣняя значеніе условія (ξ), можемъ написать его въ такомъ видѣ:

$$\Delta(R+Q)=\Theta.$$

Уравненія теперь напишутся такъ:

изведеніемъ ея измѣненія (при разложеніи по биному Ньютона) на производныя по координатамъ, можно пренебречь, какъ малыми высшаго порядка. -

$$u = \frac{d(P+Q)}{dx} + u' + u''$$

$$v = d\left(\frac{P+Q}{dy}\right) + v' + v''$$

$$W = \frac{d(P+Q)}{dz} + W' + W''$$

Получивъ эти новыя выраженія и поступая съ ними также, какъ выше, мы получимъ новые аналогичные результаты:

$$\frac{d^2(u'+u'')}{dt^2} - \omega^2\Delta(u'+u'') + \frac{dS'}{dx} = 0,$$

гдѣ $S' = \frac{d^2(P+Q)}{dt^2} - \Omega^2\Delta(P+Q) \cancel{= 0} \ldots (\zeta).$

Такъ какъ свойства функціи Q относительно времени не опредѣлены, то мы можемъ характеризовать ее въ зависимости отъ времени какимъ угодно условіемъ. Поэтому предположимъ, что

$$S' = 0.$$

Будемъ P+Q снова обозначать одной буквой P, и u'+u'' буквой u', тогда получимъ изъ ур-ія (ζ)

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \Omega^2\Delta P$$ и изъ ур-ія (4)

$$d^2u' = \omega^2\Delta u'$$ и аналогично

$$\frac{d^2v'}{dt^2} = \omega^2\Delta v'$$

β

$$\frac{d^2w'}{dt^2} = \omega^2\Delta w'!$$

§10. Разсмотримъ теперь, какое движеніе характеризуется послѣдними ур-іями.

Если отдѣльно разсматривать движенія, характеризуемыя ур-іями

$$u=\frac{dP}{dx};\ v=\frac{dP}{dy};w=\frac{dP}{dz},$$

то получимъ $\Theta=\Delta P$, слѣдовательно, это суть движенія, связанныя съ измѣненіемъ плотности внутри среды.

Составимъ вращенія около осей x, y и z.

$$2\xi=\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}$$

Легко видѣть, что какъ 2ξ, такъ аналогично и 2η и 2ζ равны 0. Слѣдовательно, въ этой группѣ движеній отсутствуютъ вращенія. Это также группа движеній, которая возможна въ упругой жидкости. Дѣйствительно, въ послѣдней, вслѣдствіе отсутствія тангенціальныхъ силъ, $\mu=0$, и поэтому всѣ u', v' и w' равны 0.

Итакъ, разсмотрѣнныя движенія возможны въ упругой жидкой средѣ.

Движенія u', v' и w' соотвѣтствуютъ условію

$$\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{dy}+\frac{dw'}{dz}=0\ \ldots\ (8).$$

т.е. кубическое расширеніе или сжатіе $\Theta=0$, и движеніе происходитъ безъ измѣненій плотности среды.

Дифференцируя два послѣднихъ уравненія изъ уравненій (13) соотвѣтственно по z и y и вычитая, получаемъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \omega^2\Delta\xi.$$

Значитъ это движеніе будетъ сопровождаться съ вращеніемъ и вращенія удовлетворяютъ тѣмъ же уравненіямъ въ частныхъ производныхъ, какъ и перемѣщенія.

Мы можемъ выбрать для u', v' w' тотъ видъ, который условію неизмѣняемости плотности среды (8) тожественно удовлетворяетъ.

Именно, положимъ, что

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \\ v' &= \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \\ w' &= \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

и отъ этого условіе (8) не измѣняется. Поэтому мы можемъ представить движенія въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dp}{dx} + \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \\ v &= \frac{dp}{dy} + \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \\ w &= \frac{dp}{dz} + \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (\varphi)$$

Изъ ур-ій (δ) легко найдемъ, что

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2 w}{dt^2}\right)=$$
$$=\omega^2\frac{d}{dz}\left(\Delta v\right)-\omega^2\frac{d}{dy}\left(\Delta W\right)$$

Этому уравненію можно удовлетворить, полагая
$\frac{d^2 V}{dt^2}=\omega^2\Delta V$ и подобнымъ уравненіямъ будутъ удовлетворять два другія изъ нашихъ функцій.

Итакъ, перемѣщенія въ упругой средѣ удовлетворяютъ условію, что въ нихъ входятъ функціи φ, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ съ частными производными слѣдующаго вида:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=C\Delta\varphi,$$

причемъ для одной группы движеній $C=\Omega=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, а для другого рода движеній

$$C=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

§11. Извѣстно, что движенія, которыми мы хотимъ объяснить свѣтовыя явленія, должны быть разсматриваемы какъ поперечныя колебанія. А поперечныя движенія представляютъ собою вторую группу движеній, которыя невозможны въ жидкой средѣ. Поэтому теорія свѣта беретъ свое объясненіе изъ теоріи упругаго твердаго тѣла.

Выведемъ интегралъ функціи $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=C^2\Delta\varphi$ для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ. Положимъ, что φ есть функція отъ z и t

$$\varphi=\varphi(z,t).$$

Тогда имѣемъ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=C^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}\quad\ldots\quad(\mathcal{E}).$$

Введемъ вмѣсто z и t новыя перемѣнныя. Именно, пусть

$$\xi=z-ct.$$
$$\eta=z+ct$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{d\varphi}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}=$$
$$=-C\frac{d\varphi}{d\xi}+C\frac{d\varphi}{d\eta}\quad \text{и}$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=C^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-2C^2\frac{d^2\varphi}{d\xi d\eta}+C^2\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}.$$

Если будемъ подобнымъ образомъ составлять производныя по z, то получимъ слѣдующія выраженія:

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi}{d\xi}+\frac{d\varphi}{d\eta}\quad \text{и}$$
$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+2\frac{d^2\varphi}{d\xi d\eta}+\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}.$$

Слѣдовательно,

$$C^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}=C^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+2C^2\frac{d^2\varphi}{d\xi d\eta}+C^2\frac{d^2\varphi}{d\eta^2},\ \text{а}$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=C^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-2C^2\frac{d^2\varphi}{d\xi d\eta}+C^2\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}$$

Вычитая изъ нижняго уравненія верхнее, получимъ на основаніи $(\mathcal{E})$:

$0 = \frac{d^2\varphi}{d\xi d\eta}$, откуда, интегрируя по η $\frac{d\varphi}{d\xi} = f(\xi)$ и интегрируя еще разъ, $\varphi = f(\xi) + F(\eta)$, гдѣ f и F суть нѣкоторыя произвольныя функціи.

Итакъ, получаемъ, что

$$\varphi = f(z-ct) + F(z+ct) \quad . \; . \; . (A).$$

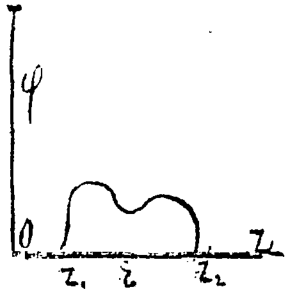
Для f и F мы, слѣдовательно, можемъ брать какія угодно выраженія. Поэтому мы можемъ допустить, что $F=0$, тогда $\varphi = f(z-ct)$.

Разсмотримъ свойства этой функціи. Пусть $z-ct=\xi$ и пусть $f(\xi)$ отлична отъ нуля до тѣхъ поръ, пока ξ заключается между предѣлами 0 и $+\varepsilon$.

Изобразимъ это графически. По оси ординатъ будемъ откладывать φ, а за ось абсциссъ примемъ ось z. Значенія ординаты начинаются съ z_1 и кончаются z_2, причемъ

$$z_1 - ct = 0 \quad и$$

$$z_2 - ct = \varepsilon,$$ откуда $z_1 = ct$, а $z_2 = ct + \varepsilon$. Функція $f(\xi)$ изображается кривой z_1Kz_2.



По мѣрѣ увеличенія времени z_1 и z_2 будутъ отодвигаться одинаково относительно координатъ вправо. Когда время t возрастетъ на 1, то кривая отодвинется на разстояніе c, ибо настолько именно увеличатся z и z_1; слѣдовательно, скорость распространенія пертурбаціи равна c (или скорость распространенія волнъ). Итакъ, коэффиціентъ c, входящій въ наше основное уравненіе съ частными производными есть скорость распространенія пертурбацій, соединенныхъ съ измѣненіемъ плотности среды, а во второмъ случаѣ скорость распространенія волнъ, не соединенныхъ съ измѣненіемъ плотности среды. Можно также доказать, что и F также характеризуетъ распространеніе пертурбацій со скоростью c въ сторону отрицательныхъ z.

§12. Прежде чѣмъ идти дальше, остановимся нѣсколько на случаѣ распространенія деформацій. Пусть φ есть Φ и при томъ зависитъ только отъ z и t; разсмотримъ случай движенія, соединеннаго съ измѣненіемъ плотности.

Движеній, параллельныхъ осямъ X и Y не будетъ; остается только движеніе, параллельное оси Z

$$w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Движеніе въ направленіи оси z совершается въ томъ же направленіи, въ которомъ распространяется пертурбація.

Такъ какъ f-функція произвольная, то мы можемъ подставить вмѣсто нея cos или sin и тогда для случая этихъ періодическихъ функцій будемъ имѣть дѣло съ продольными колебаніями.

Аргументъ z постояненъ на плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ оси z; и для такихъ плоскостей одинаково, слѣдовательно, по мѣрѣ того, какъ распространяется пертурбація, движеніе будетъ распространяться цѣлыми плоскостями, или плоскими волнами.

Положимъ, что φ есть функція v и притомъ зависитъ только отъ z и t; тогда

$$u = \frac{dv}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}$$

, остальныя же перемѣщенія v и w будутъ отсутствовать.

Движеніе въ этомъ случаѣ будетъ происходить въ направленіи, параллельномъ оси x, т. е. нормальномъ къ распространенію пертурбацій. Слѣдовательно, движеніе будетъ безъ измѣненія плотности.

Въ случаѣ періодическихъ функцій это будутъ поперечныя колебанія, которыя распространяются которыя распространяются со скоростью ω.

Продольныхъ колебаній въ эфирѣ мы не находимъ; изъ этого можно вывести нѣкоторыя заключенія о свойствахъ самаго эфира.

Пусть нѣкоторое тѣло подвергается сжатію (напр. въ піезометрѣ); тогда перемѣщенія его точекъ представятся так:

$$u = -ax;\quad v = -ay;\quad w = -az.$$

Въ этомъ случаѣ укороченіе единицы длины по осямъ будетъ

$$\delta_1 = \frac{du}{dx} = -a;\quad \delta_2 = \frac{dv}{dy} = -a;\quad \delta_3 = \frac{dw}{dz} = -a,$$

т. е. укороченіе по всѣмъ направленіямъ происходитъ одинаково. Кубическое сжатіе будетъ $\theta = -3a$.

Упругая сила p, дѣйствующая по оси x, представлялась выраженіемъ

$$p = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}.$$

Для нашего случая $p = -3\lambda a - 2\mu a$.

Т. к. сжатія по всѣмъ направленіямъ одинаковы, то и нормальныя силы упругости одинаковы.

Изъ выраженія для p $a = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}$.
Подставляя въ выраженіе для Θ, получаемъ

$$\Theta = \frac{3p}{3\lambda+2\mu}.$$

Если допустить, что въ эфирѣ нѣтъ продольныхъ волнъ, потому что

$$\Omega = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = 0,$$

то должно $\lambda + 2\mu = 0$.

Въ то же время μ будетъ положительнымъ, т. к. $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – величина дѣйствит, а не мнимая.

Отсюда $\lambda=-2\mu$ и $\Theta=-\frac{3p}{4\mu}$. Это выраженіе показываетъ, что (при нашемъ предположеніи $\mathfrak{R}=0$) когда мы сжимаемъ какое тѣло оно расширяется ($p=-$ и поэтому $\theta=+$) и наоборотъ.

Такой среды существовать не можетъ, а слѣдовательно $\mathfrak{R}\neq 0$.

Остается предположить, что въ эфирѣ $\mathfrak{R}=\infty$. Такое предположеніе тоже будетъ соотвѣтствовать невозможности распространенія продольныхъ колебаній. Теперь $\lambda+2\mu=\infty$; $\theta=\frac{3p}{3\lambda+2\mu}=0$, т. е. среда несжимаема.

Величину μ - коэффиціентъ твердости, можно вычислить, пользуясь гипотезами Томсон'а. По Томсон'у для эфира $\rho=10^{-22}$.

Скорость же свѣта, какъ извѣстно, $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 3.10^{10}$ cm., отсюда $9.10^{20} = \frac{\mu}{10^{-22}}$, $\mu = \frac{9}{100}$, приблизительно $\mu = \frac{1}{10}$ (C.G.S) — таковъ коэф. твердости эѳира.

Для стали, напр, $\mu = 8.10^{11}$, т.е. несравненно больше. Свѣтовой эѳиръ въ этомъ отношеніи приближается къ студнямъ.

Теперь вычислимъ энергію разсматриваемыхъ движеній.

Живая сила въ единицѣ объема выразится такъ: $\frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2$; затѣмъ мы имѣемъ потенціалъ упругости F; $-\delta F$ будетъ убыль работы и слѣдовательно F — потенціальная энергія.

Отсюда полная энергія $Э = \frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + F$. Если положимъ для поперечныхъ колебаній, распространяющихся по оси x, $\nabla = \varphi \delta^2 u = \frac{d\varphi}{dz}$, F представится такъ: $F = \frac{\lambda}{2}\theta^2 + \mu\left\{\left(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \left(2\left(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2\right)\right)\right)\right\}$.

Очевидно, всѣ d нули, ибо $d_1 = \frac{du}{dx} = 0$, v и $w = 0$. $2g_1 = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$, $2g_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{du}{dz}$; $2g_3 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0$, $\theta = 0$, и окончательно $F = \frac{\mu}{2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2$.

Полная энергія распространяющейся плоской волны, отнесенная къ единицѣ объема, будетъ $Э = \frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2$.

Наше $u = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{df}{d\xi}(\alpha)$; $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{df}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dt} = -C \times \frac{df}{d\xi}.(в)$.

Изъ сравненія (α) и $(в)$ $+ \frac{d\varphi}{dt} = -C\frac{d\varphi}{dz}$.

Кромѣ того $\frac{d^2u}{dt^2} = C^2\Delta u$.

φ и u могутъ имѣть одинъ и тотъ же видъ, поэтому $\frac{du}{dt} = -C\frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dz} = -\frac{1}{C}\frac{du}{dt}$;
$Э = \frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{2C^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2$.

Для поперечныхъ колебаній $C^2 = \frac{\mu}{\rho}$ и $\frac{\mu}{C^2} = \rho$. Полная энергія $Э = \frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\rho}{2} = \rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2$. Кинетическая энергія, какъ видимъ, равна потенціальной $(K=П)$, а поэтому напряженіе свѣтового колебанія можно измѣрять любой изъ нихъ или ихъ суммой. Различіе касается только постояннаго фактора.

Данное разсужденіе неприложимо для случая стоячихъ волнъ. Для такихъ волнъ можно положить $\varphi = f(x,y,z)\cdot F(t)$. Это есть уравненіе движенія стоячихъ волнъ. Видъ функціи φ совершенно произволенъ. Мы положимъ, что $\varphi = f(ax+by+cz-st+\delta)$, а f дадимъ видъ періодической функціи

$$\varphi = M\,cs(ax+by+cz-st+\delta).$$

Перемѣщенія по осямъ, изъ которыхъ слагается истинное перемѣщеніе, мы примемъ слѣдующія:

$$u = A\,cs(ax+by+cz-st+\delta)$$
$$v = B\,cs(ax+by+cz-st+\delta)$$
$$w = C\,cs(\text{ id.} - \ - \ - \ - \ )$$

Движеніе, представляемое этими аргументами, будетъ прямолинейное, ибо $\frac{u}{A} = \frac{v}{B} = \frac{w}{C} = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

cosы угловъ, образуемыхъ направленіемъ даннаго перемѣщенія съ осями, будутъ $\cos(kx) = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Величина $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ называется амплитудой колебанія, а аргументъ cosа — фазой колебанія.

Періодъ колебанія, т. е. возвращеніе фазы колебанія къ первоначальному значенію при тѣхъ же x, y и z, есть $T = \frac{2\pi}{\rho}$. ?

Полагая $ax + by + cz = \rho$, получаемъ аргументъ cosа въ видѣ $\rho - st + \delta$; ρ будетъ параметръ цѣлаго ряда плоскостей, параллельныхъ другъ другу при постоянныхъ a, b и c.

Положимъ $h = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ cosа угловъ, образуемыхъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала координатъ на плоскость $ax +$

$+ by + cz = \rho$ съ осями координатъ, будутъ $\frac{a}{h}, \frac{b}{h}, \frac{c}{h}$ и длина перпендикуляра $p = \frac{\rho}{h}$.

Въ рядѣ нашихъ параллельныхъ плоскостей есть такія, что разность ихъ параметровъ $\rho_1 - \rho = 2\pi \cdot n$, гдѣ n - число цѣлое и положительное; при этомъ для нихъ и аргументы функціи φ будутъ отличаться на $2\pi \cdot n$., т. е. это будутъ плоскости, находящіяся въ одинаковой фазѣ колебанія.

По раздѣленіи на h, получаемъ $\frac{\rho_1}{h} - \frac{\rho}{h} = n \frac{2\pi}{h}$ или $p_1 - p = n \frac{2\pi}{h}$. При $n = 1$ имѣемъ $p_1 - p = \frac{2\pi}{h} = \lambda$ - разстояніе двухъ ближайшихъ плоскостей, находящихся въ одинаковой фазѣ колебанія; это разстояніе называется длиной волны (λ).

Мы можемъ, такъ сказать, глазами слѣдить за одной и той же фазой колебанія, наблюдать ея переходъ съ одной плоскости на другую и опредѣлить скорость этого распространенія колебательнаго движенія въ данной средѣ.

Это прослѣживаніе перемѣщенія одной и той же фазы соотвѣтствуетъ такому одновременному измѣненію ρ и t, при которомъ аргументъ функціи $\varphi(\rho-st+\delta)$ остается неизмѣннымъ, т. е. $d(\rho-st+\delta)=0$; это и будетъ значить, что мы слѣдимъ за движеніемъ одной и той же фазы.

$d\rho-sdt=0$, но изъ $\frac{\rho}{h}=p$ будетъ $d\rho=$ $=hdp$, слѣдовательно $hdp-sdt=0$ и $\frac{dp}{dt}=\frac{s}{h}$ – это и есть скорость распространенія фазы или измѣненіе разстоянія отъ начала координатъ той плоскости, которая несетъ одну и ту же фазу. Такая плоскость называ–

ется плоской волной; слѣдовательно $v=\frac{s}{h}$.

Если эту скорость умножимъ на періодъ полнаго колебанія T, то получимъ

$$Tv=\frac{2\pi}{s}\cdot\frac{s}{h}=\frac{2\pi}{h}=\lambda$$

т. е. произведеніе изъ скорости распространенія на періодъ колебанія равно длинѣ волны.

Съ этими данными преобразуемъ наши первоначальныя выраженія измѣщеній по осямъ координатъ $u=A\cos(\rho-st+\delta)$. Аргументъ cos'а умножимъ и раздѣлимъ на $2\pi h$. $u=\cos\left(\frac{\rho h}{2\pi h}-\frac{sth}{2\pi h}+\frac{\delta h}{2\pi h}\right)2\pi$, $u=A\cos\left(\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{\rho}{h}-\frac{st}{2\pi}+\frac{\delta}{2\pi}\right)2\pi$, или замѣтимъ, что можно, $u=A\cos 2\pi\left(\frac{\rho}{\lambda}-\frac{t}{T}+\underline{\delta}\right)$, гдѣ $\underline{\delta}=\frac{\delta}{2\pi}$.

Въ такія формулы должны преобразоваться наши интегралы. Предположимъ, что у насъ есть еще другое колебательное движеніе, съ другой амплитудой, но съ тѣмъ же періодомъ колебанія и длиной волны $U'=A'\,cs(2\pi(\frac{p}{\lambda}-\frac{t}{T}+\delta_1)$ . . . (2).

Мы можемъ, разсматривая систему двухъ такихъ волнъ, поставить рядъ вопросовъ.

Напримѣръ, какъ разнятся фазы этихъ двухъ движеній для одной и той же точки и одного и того же момента времени?

Вычитая при этихъ условіяхъ аргументы cs'овъ, получаемъ разность фазъ $\vartheta = 2\pi(\underline{\delta}-\delta_1)$ . . . (3).

Можно разыскивать плоскости, имѣющія въ одинъ и тотъ же моментъ одинаковыя фазы. Мы опредѣлимъ разстояніе между двумя такими плоскостями.

Фазы по предположенію равны, но p различны, т. е. $\frac{p_1}{\lambda}-\frac{t}{T}+\delta_1=\frac{p}{\lambda}-\frac{t}{T}+\underline{\delta}$.

Отсюда имѣемъ искомое разстояніе $p-p_1=\lambda(\delta_1-\underline{\delta})$ . . . . (4).

Это разстояніе называется *разностью хода* обѣихъ системъ плоскихъ волнъ.

Поставимъ третій вопросъ: какъ великъ наименьшій промежутокъ времени, отдѣляющій моменты, когда на одной и той же плоскости обѣ системы колебаній имѣютъ одинаковыя фазы? Въ этомъ случаѣ различны t. $\frac{p}{\lambda}-\frac{t_1}{T}+\delta_1=\frac{p}{\lambda}-\frac{t}{T}+\underline{\delta}$, откуда $t-t_1=T(\underline{\delta}-\delta_1)$ . . . (5).

Этотъ промежутокъ времени, отдѣляющій появленіе одной и той же фазы въ двухъ системахъ волнъ на одной и той же плоскости, называется, смотря по тому, положителенъ-ли онъ, или отрицателенъ, *опаздываніемъ* или *упрежденіемъ* фазы.

Мы имѣемъ

$$\frac{\lambda}{2\pi} = -\frac{\rho-\rho_1}{\lambda} = \frac{t-t_1}{T} = \delta-\delta_1$$

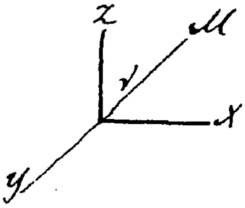
Возвратимся къ основному ур-iю съ частными производными:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = C^2\Delta\varphi \quad (A)$$

Мы разсматриваем тотъ случай, когда φ зависитъ отъ времени t и отъ разстоянiя точки пространства до нѣкоторой неизмѣняемой точки, $\varphi(r,t)$.

Вообразимъ начало координатъ въ неизмѣняемой точкѣ O.

Тогда $r^2=x^2+y^2+z^2$, $\frac{dv}{dx}=x$, $\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}$



$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r}.$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{x^2}{r^3}$$

Аналогично:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2}{r^3}$$

Интересующее же насъ уравненіе (C) отличается отъ этого только тѣмъ, что въ немъ вмѣсто φ стоитъ $r\varphi$ и вмѣсто z – r. Поэтому можемъ написать, что

$$r\varphi = f(r-ct)+F(r+ct),$$ откуда

$$\varphi = \frac{1}{r}f(r-ct)+\frac{1}{r}F(r+ct)\ \ldots\ (D').$$

Разборъ этого выраженія совершенно аналогиченъ разбору выраженія (D). Оно даетъ намъ 2 системы сферическихъ волнъ: одна, именно f, исходитъ изъ точки O, другая же F – изъ безконечности.

Точка O называется центромъ сотрясеній; особое состояніе этой точки даетъ начало движенію.

Функціи f и F совершенно произвольны. Подставляя вмѣсто нихъ знаки cs и sn, получимъ періодическую функцію, которая будетъ удовлетворять ур-ію (A).

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=c^2\Delta\varphi.$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\frac{z^2}{r^3}$$

Складывая 3 послѣднія выраженія, получаемъ

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) + 3\frac{d\varphi}{dr}\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\times$$

$$\times\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}. \quad (B).$$

Подставляя въ (A), имѣемъ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = C^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Наши r и t - двѣ независимыхъ перемѣнныхъ.

Умножимъ обѣ части послѣдняго равенства на r. Тогда

$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = C^2\left(r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Вторая часть есть не что иное, какъ $C^2\frac{d^2 r\varphi}{dr^2}$. Именно $\frac{dr\varphi}{dr} = \frac{r\,d\varphi}{dr} + \varphi$,

$$\frac{d^2 r\varphi}{dr^2} = r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\frac{d\varphi}{dr}.$$

Поэтому $\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = C\frac{d^2 r\varphi}{dr^2}$. (C).

Интегралъ этого уравненія намъ уже извѣстенъ. Мы интегрировали $c^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ и получили

$$\varphi = f(z-ct) + F(z+ct). \quad (D).$$

Аргументъ $x-ct$ мы можемъ умножить на нѣкоторый постоянный множитель $\frac{2\pi}{\lambda}$ и прибавить къ нему постоянное количество, $2\pi\delta$. Получимъ $\frac{2\pi x}{\lambda}-ct\frac{2\pi}{\lambda}+2\pi\delta$.
$C=\frac{\lambda}{T}$; окончательно $\frac{2\pi x}{\lambda}-t\frac{2\pi}{T}+2\pi\delta$.
У насъ будетъ

$$f\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}+\delta\right)\right).$$

Принципъ Гюйгенса.

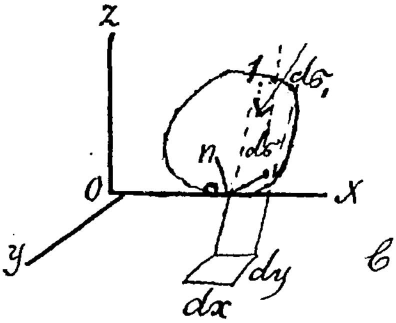
Математическое выраженіе принципа Гюйгенса первый далъ Кирхгофъ; мы дадимъ выводъ, принадлежащій извѣстному итальянскому геометру Бельтрами.

Предварительно разсмотримъ преобразованіе двухъ интеграловъ, которые будутъ нужны при нашихъ выводахъ.

Имѣемъ $\iiint\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dxdydz$, взятый по нѣкоторому конечному объему.

Надъ каждымъ изъ членовъ, стоящихъ въ скобкахъ, мы можемъ произвести интеграцію по частямъ; сдѣлаемъ это съ послѣднимъ членомъ.

$$\iiint \frac{dC}{dz}\, dx\,dy\,dz = \iint dx\,dy \int \frac{dC}{dz}\, dz = \iint dx\,dy \int_0^1 C = \iint dx\,dy\, C_1 - \iint dx\,dy\, C_0.$$



Если dσ — элементъ по поверхности, ограничивающей взятый объемъ, то dxdy будетъ проекція его на плоскость xy; при этомъ для верхняго предѣла $dxdy = -d\sigma_1 \, cs(n,z)$, гдѣ (n,z) есть уголъ нормали къ $d\sigma_1$ съ осью z; знакъ минусъ стоитъ потому, что нормаль у насъ направлена внутрь и уголъ между положительными направленiями n и Z больше 90°; для нижняго предѣла $dxdy = d\sigma_0 \cos n_0 Z$.

Слѣдовательно

$$\iint dxdy C_1 - \iint dxdy C_0 = -\iint C_1 \cos n_1 z\, d\sigma_1 -$$

$$- \iint C_0 \cos n_0 Z\, d\sigma_0 = \iint C \cos nz\, d\sigma,$$ охватывающему всю поверхность.

Такъ какъ $cs(nz) = \frac{dz}{dn}$, то

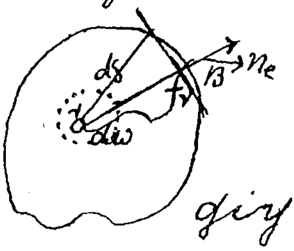
$$\iint dxdy C = -\iint C \frac{dz}{dn}\, d\sigma$$ (здѣсь dn - приращенiе нормали n при передвиженiи отъ ds внутрь объема)

Продѣлавъ такого рода преобразованiе со всѣми тремя членами первоначальнаго интеграла, получимъ:

$$\iiint\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right)dxdydz = -\iint\left\{A\frac{dx}{dn} + B\frac{dy}{dn} + C\frac{dz}{dn}\right\}d\sigma \quad \ldots (F)$$

Пусть внутри нашего объема задана какая нибудь (функцiя) функція координатъ точекъ этого объема. Отъ произвольно взятой точки О, внутри объема — условимся отсчитывать разстоянія всѣхъ остальныхъ точекъ.

Будемъ разсматривать $\iiint \frac{dA}{dn}\frac{d\tau}{\cancel{d}r^2}$



Изъ О опишемъ радіусомъ r сферу и на ней возьмемъ безконечно малый элементъ ds. Пусть тѣлесный уголъ, соотвѣтствующій этому элементу, т. е. отверстіе конуса, имѣющаго вершину въ точкѣ О, и образующія котораго скользятъ по контуру элемента ds, есть $d\omega$; тогда $ds = r^2 d\omega$. На ds построимъ цилиндрикъ съ высотой dr; его объемъ $d\tau = ds\,dr = r^2 d\omega\,dr$. Теперь

$$\iiint \frac{dA}{dn}\frac{d\tau}{r^2} = \iiint \frac{dA}{dn}\,dr\,d\omega\,.$$

Произведя интеграцію по r отъ $r=0$

до $r = \bar{r}$, гдѣ $\bar{r}$ есть разстояніе отъ $\overset{0}{r} = r$ до поверхности, получимъ

$$\iiint A\,d\omega.$$

Для $r = \bar{r}$ неизвѣстная пока функція A равна $\bar{A}$ и для $r = 0$ — A_0, причемъ $A_0 = \mathrm{const}$, такъ какъ A есть функція только r.

$$\iiint_{r=0}^{r=\bar{r}} A\,d\omega = \iint \bar{A}\,d\omega - A_0 \iint d\omega.$$

$\iint d\omega$ для сферы радіуса равнаго $1 = 4\pi$.

$$\iiint \frac{dA}{dr}\,\frac{d\tau}{r^2} = \iint \bar{A}\,d\omega - 4\pi A_0.$$

Преобразуемъ $\iint \bar{A}\,d\omega$.

На поверхности, ограничивающей разсматриваемый объемъ, беремъ элементъ $d\sigma$, и радіусомъ, равнымъ разстоянію этого элемента отъ O, описываемъ изъ O сферу; соотвѣтственный элементъ этой сферы
$d\alpha = \underline{r}^2 d\omega = d\sigma \cos(\underline{r}, n_e) = d\sigma \cos\beta$.

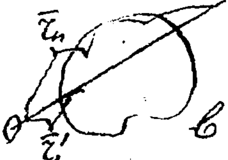
n_e — внѣшняя нормаль къ поверхности, но функція $\bar{A}$ намъ извѣстна лишь внутри объема и поэтому мы введемъ внутреннюю нормаль n_i; тогда $da = -d\sigma \cos(r, n_i)$; $\cos(r, n_i) = \frac{dr}{dn_i}$, гдѣ dn_i и dr приращенія нормали и радіуса, слѣдовательно $da = -d\sigma \frac{dr}{dn}$ (опуская знакъ i).

На основаніи этого $dw = \frac{da}{r^2} = -$
$-\frac{d\sigma}{r^2}\frac{dr}{dn} = d\sigma \frac{d(1/r)}{dn}$.

Теперь можемъ написать

$$\iiint \frac{dA}{dr}\frac{d\tau}{r^2} = \iint A \frac{d(1/r)}{dn} d\sigma - 4\pi A_0 \; . \; . \; . \; (H)$$

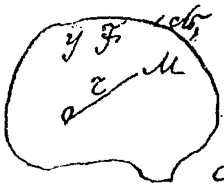
Если бы точка O лежала не внутри, а внѣ взятаго объема, то интеграцію по r пришлось бы производить не въ предѣлахъ $r=0$ и $r = \bar{r}$, а для двухъ значеній его на поверхности. Въ этомъ случаѣ членъ $4\pi A_0$ будетъ отсутствовать, такъкакъ намъ не придется брать интеграла по поверхности сферы радіуса, равнаго 1 около точки O.



Въ виду такого обобщенія мы перепишемъ теорему Н слѣдующимъ образомъ:

$$\iiint \frac{dA}{dr}\frac{d\tau}{r^2} = \iint A\frac{d(1/r)}{dn}ds - A_0\sigma_0, \quad \ldots (H_1)$$

при чемъ $\sigma_0 = 4\pi$, когда точка 0 лежитъ внутри объема, и $\sigma_0 = 0$, когда 0 взято внѣ его.



Пусть даны внутри нѣкотораго объема двѣ функціи φ и F, конечныя, непрерывныя и однозначныя на всемъ протяженіи этого объема. Даемъ затѣмъ точку 0, которая можетъ лежать какъ внутри такъ и внѣ вышеупомянутаго объема. Отъ нея будемъ отсчитывать разстоянія или другихъ точекъ или элементовъ поверхности и объема.

Составимъ для произвольной точки M выраженіе $\frac{d}{dx}\left\{\left(\varphi\frac{dF}{dx} - F\frac{d\varphi}{dx}\right)1/r\right\} =$

$$=\left(\varphi\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dx}-F\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dx}\right)/r\;-$$

$$-\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}=\left(\varphi\frac{d^2F}{dx^2}-F\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)/r\;-$$

$$-\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)/r^2\,\frac{dr}{dx}\quad\ldots\ldots\quad(K).$$

Если x_0, y_0, z_0 – координаты точки O, то разстояніе r точки $M(x,y,z)$ отъ O выразится такъ:

$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$; диффеpенцируя по x, имѣемъ:

$$r\frac{dr}{dx}=x-x_0\ ,\ \text{или}\ \frac{dr}{dx}=\frac{x-x_0}{r}=cs(r,x).$$

Можно этотъ cs представить и иначе, подразумѣвая подъ dx проэкцію на ось x приращенія r – dr; тогда $cs(r,x)=\frac{dx}{dr}$.

Уравненіе (K) приметъ видъ

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)/r\right\}=\left(\varphi\frac{d^2F}{dx^2}-F\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)/r\;-$$

$$-\left(\varphi\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dr}-F\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dr}\right)/r^2 .$$

Подобныя же выраженія можно составить и для координатъ y и z. Складывая ихъ всѣ, мы получимъ:

$$\sum\frac{d}{dx}\left[\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)1/r\right]=$$

$$=(\varphi\Delta F-F\Delta\varphi)1/r-\left(\varphi\frac{dF}{dr}-F\frac{d\varphi}{dr}\right)1/r^2\ \ldots\ (K')$$

такъ какъ $\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dz}+\ldots$ и т. д. $=\frac{dF}{dr}$.

Здѣсь Σ означаетъ сумму производныхъ по x, y и z.

Умножимъ обѣ части уравненія (K') на элементъ объема $d\tau$, взятый въ точкѣ M, и проинтегрируемъ по всему объему

$$\iiint\sum\frac{d}{dx}\left[\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)/r\right]d\tau=$$

$$=\iiint(\varphi\Delta F-F\Delta\varphi)\frac{d\tau}{r}-\iiint\left(\varphi\frac{dF}{dr}-F\frac{d\varphi}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{r^2}\ \ldots\ (L).$$

Въ интегралѣ, стоящемъ въ лѣвой части, обозначимъ скобки съ dx черезъ A, съ dy — B, съ dz — C.

$$\iiint\sum\frac{d}{dx}\left[\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)r=\iiint\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

($d\tau = dxdydz$, какъ элементъ объема.) Получили, какъ видимъ, выраженіе (F). Посему это выраженіе можетъ быть преобразовано въ интегралъ по поверхности и на этомъ основаніи въ лѣвой части (L) можемъ написать

$$-\iint\left[\left(\varphi\frac{dF}{dx}-F\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{1}{r}\frac{dx}{dn}+\left(\varphi\frac{dF}{dy}-F\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{1}{r}\frac{dy}{dn}+\right.$$

$$\left.+\left(\varphi\frac{dF}{dz}-F\frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{1}{r}\frac{dz}{dn}\right]d\sigma,$$ а послѣ приведенія

$$-\iint\frac{1}{r}\left(\varphi\frac{dF}{dn}-F\frac{d\varphi}{dn}\right)d\sigma.$$

Уравненіе (L) теперь приметъ видъ

$$\iiint(\varphi\Delta F-F\Delta\varphi)\frac{d\tau}{r}-\iiint\left(\varphi\frac{dF}{dr}-F\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{d\tau}{r^2}+$$

$$+\iint\left(\varphi\frac{dF}{dn}-F\frac{d\varphi}{dn}\right)\frac{d\sigma}{r}=0 \quad \ldots\ldots (L').$$

Обратимъ вниманіе на средній интегралъ: его можно будетъ измѣнить по образцу интеграла (H'). Прибавимъ и вычтемъ внутри скобокъ членъ $\varphi\frac{dF}{dr}$. Получаемъ

$-\iiint\left(2\varphi\frac{dF}{dr}-\frac{d(F\varphi)}{dr}\right)\frac{d\tau}{r^2}$ или

$\iiint\frac{dF\varphi}{dr}\frac{d\tau}{r^2}-\iiint 2\varphi\frac{dF}{dr}\frac{d\tau}{r^2}$.

Воспользовавшись теперь преобразованнымъ интеграломъ (H'), можно сдѣлать такую замѣну:

$\iint F\varphi\,\frac{d(1/r)}{dn}d\sigma-\sigma_0(F\varphi)_0-\iiint 2\varphi\frac{dF}{dr}\frac{d\tau}{r^2}$.

Теперь (L') можно переписать такъ:

$$\sigma_0F_0\varphi_0=\iint\left\{\left(\varphi\frac{dF}{dn}-F\frac{d\varphi}{dn}\right)1/r+F\varphi\frac{d(1/r)}{dn}\right\}d\sigma+$$

$$+\iiint\left\{(\varphi\Delta F-F\Delta\varphi)\frac{1}{r}-2\varphi\frac{dF}{dr}\frac{1}{r^2}\right\}d\tau\ (A).$$

Изъ многихъ значеній, которыя могутъ имѣть F и φ въ различныхъ точкахъ объема, мы выдѣлили, благодаря сдѣланному преобразованію, ихъ значенія въ точкѣ O. Связь между этими и безчисленнымъ множествомъ значеній тѣхъ же функцій въ другихъ точкахъ, полученная нами въ (A), приведетъ насъ къ принципу Гюйгенса.

Предположимъ, что F есть $F(r+at)$,

т. е. будетъ функціей аргумента (r+at), гдѣ a- скорость распространенія колебательнаго движенія въ средѣ, наполняющей объемъ, нами разсматриваемый.

Эта функція удовлетворяетъ условію $\frac{d^2F}{dt^2}=a^2\frac{d^2F}{dr^2}$, въ чемъ легко убѣдиться непосредственнымъ дифференцированіемъ.

Именно, полагая $r+at=\xi$, имѣемъ $\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=a\frac{dF}{d\xi}$, $\frac{d^2F}{dt^2}=a^2\frac{d^2F}{d\xi^2}$, съ другой стороны

$$\frac{dF}{dr}=\frac{dF}{d\xi}\frac{d\xi}{dr}=\frac{dF}{d\xi}.1 \text{ и } \frac{a^2F}{dr^2}=\frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{d\xi}{dr}=$$

$=\frac{d^2F}{d\xi^2}.1$. Слѣдоват., подставляя,

$$\frac{d^2F}{dt^2}=a^2\frac{d^2F}{dr^2}.$$

Это видно и прямо изъ прежняго: $F(r+ct)$ удовлетворяло $\frac{d^2F}{dt^2}=C^2\frac{d^2F}{dr^2}$.

Функціи F мы дадимъ видъ $F(t+r/a)$, для чего стоитъ только подразумѣвать множитель a включеннымъ въ знакъ F, пока совершенно произвольный. Предположимъ еще, что φ есть функція волновая, т. е. удовлетворяющая уравненію $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\Delta\varphi$. Такое предположеніе будетъ свидѣтельствовать о томъ, что въ пространствѣ существуетъ одинъ или нѣсколько центровъ сотрясеній.

Такъ какъ F зависитъ отъ x, y, z чрезъ r, то $\frac{\varphi}{r}\frac{dF}{dn}=\frac{\varphi}{r}\frac{dF}{dr}\cdot\frac{dr}{dn}$ .... (a).

Далѣе, полагая $t+\frac{r}{a}=\xi$ будетъ

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=\frac{dF}{d\xi};$$

$$\frac{dF}{dr}=\frac{dF}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dr}=\frac{1}{a}\frac{dF}{d\xi}; \text{ слѣд.}$$

$\frac{dF}{dr}=\frac{1}{a}\frac{dF}{dt}$.

Послѣднее значеніе $\frac{dF}{dr}$ вставляемъ въ равенство (a), тогда получимъ:

$\frac{\varphi}{r}\frac{dF}{dn}=\frac{F}{r}\cdot\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dr}{dn}$; ко второй части этого уравненія прибавимъ и вы–

чтемъ величину $\frac{F}{ar} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dn}$, тогда наше выраженіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\varphi}{r} \cdot \frac{dF}{dn} = \frac{1}{ar} \frac{dr}{dn} \left(\frac{dF\varphi}{dt} \right) - \frac{F}{ar} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dn} .$$

Этими формулами мы и воспользуемся для преобразованія выраженія (A). Дѣлая подстановку только что найденнаго выраженія и припоминая, что если F зависитъ отъ r, то $\Delta F = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF}{dr}$ и $\Delta \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, мы получаемъ:

$$\sigma_0 F_0 \varphi_0 = \iint \left(\varphi . F \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{F}{ar} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dn} - \frac{F}{r} \frac{d\varphi}{dn} \right) dS +$$
$$+ \iint \frac{1}{ar} \cdot \frac{dr}{dn} \frac{d\varphi F}{dt} ds + \iiint \left(\varphi \frac{d^2F}{dr^2} - \right.$$
$$\left. - F \frac{1}{a^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \frac{d\tau}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (B).$$

Мы замѣчаемъ, что этимъ преобразованіемъ мы отдѣлили рядъ членовъ, имѣющихъ общимъ множителемъ функцію F, которую поэтому и можемъ вынести за знакъ скобокъ.

Послѣдній тройной интегралъ

можетъ быть упрощенъ подстановкой вмѣсто $\frac{d^2F}{d\tau^2}$ выраженія $\frac{1}{a^2}\frac{d^2F}{dt^2}$, вслѣдствіе чего онъ будетъ имѣть видъ:

$$\iiint\left(\varphi\frac{d^2F}{dt^2} - F\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\frac{dt}{d\tau}.$$

Легко видѣть, что

$$\varphi\frac{d^2F}{dt^2} - F\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\varphi\frac{dF}{dt} - F\frac{d\varphi}{dt}\right]$$

Теперь всѣ наши преобразованія окончены. Обозначимъ чрезъ $\mathfrak{M}(t)$ [то есть нѣкоторая функція отъ времени t] величину, стоящую подъ знакомъ двойного интеграла въ первомъ членѣ, то есть пусть

$$\mathfrak{M}(t) = \varphi\frac{d'r}{dn} - \frac{1}{ar}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}$$

Далѣе, обратимъ вниманіе на члены, содержащіе производныя по времени; множители при этихъ производныхъ отъ времени не зависятъ, а только отъ координатъ.

Обозначая, поэтому $H(t) = \iiint\Big(\varphi\frac{dF}{dt} -$

$-F\frac{d\varphi}{dt}\Big)\frac{dT}{dv}$, упомянутая часть нашего выраженія будетъ $\frac{dH}{dt}$.

Основное уравненіе (B) можетъ быть представлено теперь въ такомъ видѣ:

$$\sigma_0 F_0 \varphi_0 = \iint \mathfrak{N}(t) F\left(\frac{r}{a}+t\right) ds + \frac{dH}{dt} \quad (C)$$

Предположимъ, что существуютъ два момента времени t_0 и t такіе, что среда, въ которой взятъ нашъ объемъ, находилась въ покоѣ до момента t_0, то есть никакихъ центровъ сотрясеній (точекъ, вызывающихъ появленіе функціи φ) не было. Тогда $\varphi=0$, для всѣхъ t, меньшихъ t_0. Относительно F допустимъ, что $F=0$, для всѣхъ моментовъ времени t, большихъ t_1. Умножимъ уравненіе (C) на dt и объинтегрируемъ между $t=-\infty$ и $t=+\infty$, получимъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_0 F_0(t)\varphi_0\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\iint\mathfrak{N}(t)F\left(t+\frac{r}{a}\right)ds+\int_{-\infty}^{+\infty}H.$$

Такъ какъ T_o взято для точки O, то ему соотвѣтствуетъ $r = 0$ и T_o есть исключительно функція отъ t. Такъ какъ знакъ o только это и выражаетъ, то въ дальнѣйшемъ мы его опустимъ.

Разсмотримъ функцію H. Для низшаго предѣла, то есть для $t = -\infty$, функція $f = 0$ и ея производная по t равна 0, слѣдовательно, для этого предѣла $H(t) = 0$, то есть для безконечно удаленнаго въ прошломъ времени никакого движенія не было и среда оставалась въ покоѣ. Для высшаго предѣла, т. е. для $t = +\infty$ функція F и ея производная по времени равны 0, ибо по условію $t > t$, функція $F = 0$. Слѣдовательно $H(t)$ опять равно 0.

Предположимъ, что $t + \frac{r}{a} = \theta$, тогда $dt = d\theta$; $t = \theta - \frac{r}{a}$. Предѣлы

Лит. Общ. распр. познаній.

интеграціи не измѣнятся, слѣдовательно наше выраженіе приметъ такой видъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_0 \mathcal{F}(t)\varphi_0\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}d\theta\iint\mathcal{F}(\theta)\Omega\left(\theta-\frac{v}{a}\right)ds.$$

Такъ какъ обозначеніе безразлично, то во второй части знакъ θ замѣнимъ черезъ t; это-та же перемѣнная, лежащая между тѣми же предѣлами, как и стоящая въ лѣвой части.

Теперь имѣемъ:

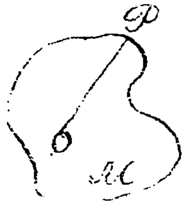
$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,\mathcal{F}(t)\left\{\sigma_0\varphi_0-\iint\Omega\left(t-\frac{v}{a}\right)ds\right\}=0.$$

Функція $\mathcal{F}(t)$ совершенно произвольна, за исключеніемъ случая когда $t=t_1$; тогда она равна 0. Поэтому предыдущее равенство возможно только, когда выраженіе въ скобкахъ равно 0, т. е. когда

$$\sigma_0\varphi_0=\iint\Omega\left(t-\frac{v}{a}\right)ds.$$

Разсмотримъ смыслъ послѣдняго выраженія. Представимъ себѣ, что точка O лежитъ внутри нашего объема, тогда $\sigma_0 = 4\pi$ и

$$4\pi\varphi_0 = \iint \Omega\left(t-\frac{r}{a}\right)ds.$$



Это выраженіе можетъ быть приложено къ нашему объему, если внутри его функція φ и ея производныя конечны и непрерывны; а это условіе тождественно съ отсутствіемъ внутри объема свѣтящихся точекъ. Точки, для которыхъ $\varphi = \infty$ суть именно центры сотрясеній, а для нашего случая — свѣтовыхъ явленій — свѣтящіяся точки.

Итакъ, видимъ, что колебательное состояніе точки O, опредѣляемое значеніемъ φ_0, зависитъ отъ

отъ значенія функціи Ω на поверхности нашего объема; эти же значенія берутся не для момента t, а для момента $t-\frac{r}{a}$, слѣдовательно колебательное состояніе точки O въ моментъ t зависитъ отъ колебательнаго состоянія поверхности не въ моментъ t, а въ болѣе раннiй $-(t-r/a)$.

Такимъ образомъ всякій элементъ поверхности вліяетъ на состояніе точки O тѣмъ состояніемъ, которое было на немъ раньше момента t на величину r/a, а это есть время необходимое, чтобы колебаніе отъ элемента достигло точки O. $\Omega(t-\tau)$

Если точка O лежитъ внѣ поверхности, не содержащей внутри центровъ сотрясенія, то предъидущее выраженіе тоже примѣняется, только теперь $\sigma_0=0$ и слѣдо-

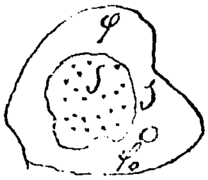
вательно
$\iint \Omega(t-r/a)ds$, выражающій (состо) вліяніе колебательнаго состоянія поверхности на колебательное состояніе внѣшней точки O, равенъ нулю. То есть въ этомъ случаѣ колебательное состояніе поверхности не оказываетъ никакого вліянія, во внѣшнихъ точкахъ. Колебанія, высылаемыя такою поверхностью во внѣшнія точки, взаимно уничтожаются.

Итакъ, мы нашли, что для точки внутри объема при отсутствіи центровъ сотрясенія

$$4\pi\varphi_0 = \iint \Omega(t-r/a)ds.$$

Положимъ, что внутри поверхности есть центры сотрясенія. Тогда, такъ какъ поверхность заключаетъ въ себѣ и точку O и свѣтящіяся точки, въ которыхъ φ безконечно-велико; то теорема наша не приложима къ объему при такихъ условіяхъ.

Для ея приложенія выдѣлимъ другую поверхность, заключающую въ себѣ эти свѣтящіяся точки.



Тогда къ объему между поверхностью S и поверхностью s теорема будетъ приложима; такъ какъ объемъ ограниченъ двумя поверхностями, то

$$4\pi\varphi_0 = \iint \mathfrak{R}(t-r/a)\,ds + \iint \mathfrak{R}(t-r/a)\,dS.$$

Теорема приложима, ибо φ внутри объема между S и s конечно, а при этомъ только условіи было возможно преобразованіе, которое привело насъ къ этому выраженію.

Предположимъ, что мы имѣемъ случай среды безпредѣльной. Тогда поверхность S будетъ безконечно большой сферы, обнимающей пространство. Функція $\varphi(t)$ будетъ равна 0, для $t = -\infty$, ибо по условію она $= 0$ для всѣхъ значеній $t < t_0$.

Въ наше выраженіе $\Omega(t - r/a)$ входитъ функція $\varphi(t - r/a)$; для $r = \infty$ она превращается въ $\varphi(t - \infty)$, а послѣдняя функція равна 0, то есть второй двойной интегралъ равенъ нулю. Слѣдовательно колебательное движеніе въ точкѣ O исключительно зависитъ отъ колебанія точекъ на поверхности s; т. е.,

$$4\pi\varphi_0 = \iint \Omega \, ds.$$

Возьмемъ теперь s на конечномъ разстояніи отъ O. Такъ какъ колебательное движеніе въ O тоже самое, то и φ_0 прежнее, то есть

$$4\pi\varphi_0 = \iint \Omega \, ds.$$

Слѣдовательно $\iint \Omega \, ds = 0$, то есть, интегралъ, взятый по какой угодно поверхности, заключающейся въ себѣ и точку О, и свѣтящіяся точки = 0; то есть колебательное состояніе на поверхности, обнимающей свѣтящіяся точки, не вліяетъ на колебательное состояніе внутреннихъ точекъ. Колебанія, посылаемыя такою поверхностью внутрь, взаимно уничтожаются.

Посмотримъ, какой физическій смыслъ имѣютъ эти теоремы. Пусть имѣемъ нѣсколько свѣтящихся точекъ, отъ которыхъ колебанія распространяются волнами. Колебаніе каждой точки среды зависитъ отъ колебательнаго состоянія на поверхности какой либо волны. Это есть волна, не перешедшая черезъ точку О.

Вторая теорема показываетъ,

что состоянiе колебанiя въ точкѣ О не зависитъ отъ колебательнаго движенiя на поверхностяхъ послѣднихъ волнъ. Каждая точка волны можетъ быть разсматриваема, какъ посылающая колебанiя. Это есть принципъ Гюйгенса, выведенный впервые Кирхгофомъ.

Теперь ознакомимся ближе съ видомъ функцiи $\mathfrak{R}$.

Мы имѣли:

$$\mathfrak{R} = \varphi \frac{d\,{}^1\!/_r}{dn} - {}^1\!/_{ar} \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dn} - $$
$$- \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn}.$$

Здѣсь r есть разстоянiе данной точки О отъ элемента поверхности. Поэтому поставимъ при r индексъ о. Получимъ:

$$\mathfrak{R} = \varphi \frac{d\,{}^1\!/_{r_0}}{dn} - {}^1\!/_{ar_0} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr_0}{dn} - $$
$$- {}^1\!/_{r_0} \frac{d\varphi}{dn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{D})$$

Функцiя φ удовлетворяетъ ур-iю

$a^2\Delta\varphi=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$; φ есть функція времени и мы должны вмѣсто t подставить $t-\frac{r_0}{a}$; гдѣ r_0 опять есть разстояніе отъ O (элемента поверхности).

Обозначимъ этотъ аргументъ черезъ ξ.

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot 1\ ,\ \text{ибо}\ \frac{d\xi}{dt}=1.$$

$$\frac{d\varphi}{dr_0}=\frac{d\varphi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dr_0}=-\frac{d\varphi}{d\xi}\cdot 1/a\ ,\ \text{слѣдов.}$$

$$-\frac{d\varphi}{dt}=+a\,\frac{d\varphi}{dr_0}\ .$$

Замѣтимъ, что здѣсь идетъ рѣчь о производной по r_0, которое является въ функціи φ только при замѣнѣ t черезъ $t-r_0/a$; функція φ можетъ содержать въ себѣ еще разстоянія и отъ другихъ точекъ пространства, что далѣе и будетъ имѣть мѣсто; но r_0 входитъ въ нее только черезъ ξ, указанной выше подстановкой. Вслѣдствіе этого

Π представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Pi = \varphi \frac{d\,1/r_0}{dn} + 1/r_0 \frac{d\varphi}{dr_0} \frac{d\overset{r_0}{\varphi}}{dn} - 1/r_0 \frac{d\varphi}{dn} \ldots \quad (VI)$$

Замѣтимъ, что

$$\frac{d\,\varphi/r_0}{dn} = \varphi \frac{d\,1/r_0}{dn} + 1/r_0 \frac{d\varphi}{dr_0} \frac{dr_0}{dn}$$

Тогда

$$\Pi = \frac{d\,\frac{\varphi(t-\frac{r_0}{a})}{r_0}}{dn} - 1/r_0 \frac{d\varphi}{dn},$$ гдѣ r_0 показываетъ, что отсчетъ r_0 дѣлаемъ отъ точки O. Въ послѣднемъ членѣ φ, есть тоже $\varphi(t-r/a)$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что вліяніе поверхности на точку O можетъ быть сведено къ волнамъ, посылаемымъ ея элементами.

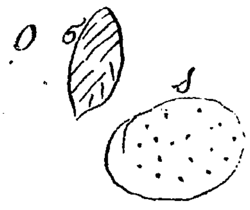
Припомнимъ, что волновая функція представляется частнымъ изъ произвольной функціи отъ $t-r/a$, дѣленной на разстояніе r; такой видъ имѣетъ $\frac{\varphi(t-r_0/a)}{r_0} = A$ и

$$1/r_0 \frac{d}{dn} \varphi(t-r_0/a) = B.$$

Вліяніе элементовъ поверхности на колебательное состояніе точки O опредѣляется не значеніемъ функціи A, а разностью ея значеній на разстояніи dn, какъ будто бы мы имѣли на поверхности двѣ системы или двойной слой свѣтящихся точекъ въ противныхъ фазахъ. Кромѣ того другое вліяніе опредѣляется еще волновой функціей B; это соотвѣтствуетъ простому слою свѣтящихся точекъ.

Наша теорія годится и для того случая, когда въ пространствѣ находится нѣкоторое тѣло, отражающее своею поверхностью или поглощающее падающія на него колебанія. Тогда

$$4\pi\varphi_0 = \int \mathfrak{A}\mathfrak{P}\, ds + \int \mathfrak{A}\mathfrak{P}\, d\sigma$$



гдѣ s есть поверхность, окружающая свѣтящіяся точки, а σ есть поверхность тѣла.

Обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда поверхность посторонняго тѣла есть абсолютно черная, т. е. ея точки не приходятъ въ движеніе. Тогда на ней $\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ и интегралъ равенъ $\int \mathfrak{P} ds = 0$, т. е. черное тѣло не измѣняетъ состоянія нашей среды.

Разсмотримъ видъ нашего Ω для того случая, когда въ пространствѣ имѣется одна свѣтящаяся точка (1). Тогда интегралъ уравненія $a^2 \Delta \varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ представится функціей такого вида:

$$\varphi = \psi\left(\frac{r - at}{r}\right) = \psi\left(\frac{r/a - t}{r}\right)$$

ψ есть произвольная функція; разстоянія r отсчитываются отъ свѣтящейся точки. Будемъ ихъ обозначать буквой r съ индексомъ (r_1)

$\left(\frac{r_1}{a} - t\right)$ умножаемъ и дѣлимъ на $2\pi/T$, причемъ дѣлитель $2\pi/T$ подразумѣваемъ включеннымъ подъ знакъ функціи φ.

Таккакъ длина волны λ равняется aT, то аргументъ функціи φ представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{r_1}{a}-t\right)\frac{2\pi}{T}=2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right).$$

Предположимъ, что функція φ есть cs. тогда

$$\varphi = 1/r_1\, cs\, 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) \dots \qquad (e)$$

Вмѣсто t подставимъ $t - r_0/a$

$$\underline{\varphi(t-r_0/a)}_{r_1} = 1/r_1r_0\, cs\, 2\pi\left(r_1/\lambda - \frac{t}{T} + r_0/aT\right)$$

Это будетъ величина A, входящая въ первый членъ выраженія Ω.

Мы видимъ, слѣдовательно, что Ω будетъ содержать два различныхъ r; каждое изъ нихъ имѣетъ одну оконечность на элементѣ поверхности, по которой берется $\int \Omega ds$; затѣмъ другая оконечность у r_0 лежитъ въ точкѣ 0, а у r_1 - въ въ свѣтящейся точкѣ.

Итакъ:

$$\Omega = \frac{-1}{r_1 r_0^2} \frac{dr_0}{dn} \cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) -$$

$$- \frac{2\pi}{\lambda r_1 r_0} \sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\frac{dr_0}{dn} +$$

$$+ \frac{1}{r_1^2 r_0} \frac{dr_1}{dn} \cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) +$$

$$+ \frac{2\pi}{\lambda r_0 r_1} \frac{dr_1}{dn} \sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right);$$

Ω можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\Omega = -\frac{1}{r_0 r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dn} - \frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{dn}\right)\cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) +$$

$$+ \frac{2\pi}{\lambda r_0 r_1}\left(\frac{dr_1}{dn} + \frac{dr_0}{dn}\right)\cancel{2}\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

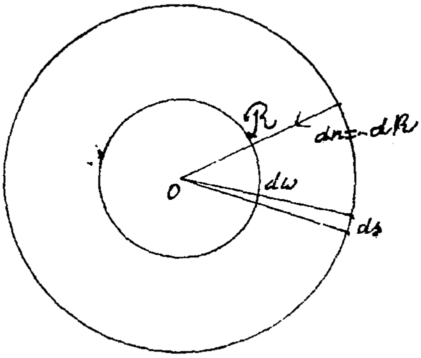
[illegible]

Это выраженіе есть исходное для явленій диффракціи; оно въ случаѣ свѣтовыхъ явленій упрощается, когда точка C находится на значительномъ разстояніи отъ свѣтящейся точки.

λ — длина свѣтовой волны, есть малая величина, въ виду чего для свѣтовыхъ комбинацій можемъ отбросить первый членъ: онъ будетъ малъ сравнительно со вторымъ членомъ.

Теорема Пуассона

Эта теорема имѣетъ приложеніе въ явленіяхъ звука и есть первая и несовершенная попытка выраженія принципа Гюйгенса.



Пусть та поверхность, по которой берется $\int \Omega\, ds$, есть сфера радіуса R; въ центрѣ ея лежитъ точка O. Тогда n направлено противоположно R и $dn = -dR$.

$$\Omega = \varphi\frac{d\,1/r}{dn} - \frac{1}{ar}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} =$$

$$= -\varphi\frac{d\frac{1}{R}}{dR} + \frac{1}{aR}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dR}{dR} + \frac{1}{R}\frac{d\varphi}{dR} =$$

$$= \frac{\varphi}{R^2} + \frac{1}{aR}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{R}{R^2}\frac{d\varphi}{dR} =$$

$$= \frac{\varphi}{R^2}\frac{dR}{dR} + \frac{R}{R^2}\frac{d\varphi}{dR} + \frac{1}{aR}\frac{d\varphi}{dt}\ .$$

$$\Omega = \frac{1}{R^2}\frac{dR\varphi}{dR} + \frac{1}{aR}\frac{d\varphi}{dt}\ .$$

Такъ какъ $4\pi\varphi_0 = \iint \Omega\, ds$, то колебательное состояніе точки O опредѣляется выраженіемъ:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\frac{dR\varphi}{dR}ds +$$

$$+ \frac{1}{4\pi Ra}\int\frac{d\varphi}{dt}ds$$

Опишемъ теперь около O сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ, тогда $ds = d\omega R^2$. Поэтому

$$\varphi_0(t) = 1/4\pi\left\{\int\frac{dR\varphi}{dR}d\omega + \frac{R}{a}\int\frac{d\varphi}{dt}d\omega\right\}\ .\ .\ .\ .\ (\alpha)$$

Но $\int \frac{d}{dR}(R\varphi)d\omega = \frac{d}{dR}\int R\varphi\, d\omega =$

$$= \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\int R^2\varphi\, d\omega\right) = \frac{d}{dR}\left(\frac{\int\varphi\, ds}{R}\right);$$

Слѣдовательно

$$\varphi_0(t) = \left\{\frac{d}{dR}\left(\frac{R\int\varphi\, ds}{4\pi R^2}\right) + \frac{R}{4\pi R^2 a}\int\frac{d\varphi}{dt}ds\right\}.$$

[illegible]

Въ правой части, какъ мы знаемъ, надо подставить вмѣсто t : $t - \frac{R}{a}$, какъ это дѣлали раньше.

Выбираемъ радіусъ сферы такъ, чтобы $R = at$ (тогда $dR = adt$); замѣчаемъ, что колебанія, происходившія вначалѣ времени въ элементѣ ds, достигаютъ точки O въ моментъ t.

Уравненіе (a) связываетъ значеніе φ для даннаго времени $\varphi(t)$ съ тѣмъ, которое было

Гит. Общ. распр. пол. Книгъ.

для начала времени на поверхности сферы. Вслѣдствіе сказаннаго

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi}\ ;\ t = t - \frac{R}{a}.$$

Но при нашемъ выборѣ R будетъ $t - \frac{R}{a} = 0$, а потому $t = 0$.

$$\varphi_0(t) = \left\{ \frac{d}{dR}\left(\frac{R\int\varphi ds}{4\pi R^2}\right) + \frac{R}{4\pi R^2 a}\int \frac{d\varphi}{dt} ds \right\}$$

Но $R = at$, $dR = adt$; означимъ еще среднія значенія для момента t_0 на нашей сферѣ:

$$\frac{\int\varphi ds}{4\pi R^2} = \bar{\varphi}_0 \ /t=0).$$

$$\left(\frac{\int \frac{d\varphi}{dt} ds}{4\pi R^2}\right)_{t=0} = \bar{\varphi}_0'$$

, то найдемъ

$$\varphi_0(t) = \frac{d}{dt}\left(t\bar{\varphi}_0\right) + t\bar{\varphi}_0'.$$

Эта формула была выведена Пуассономъ въ 1818 году.

Выводъ, изложенный выше, принадлежитъ Дюгему.

Болѣе сложной выводъ принадлежитъ Кирхгофу. Особая формула вывода имѣется еще въ акустикѣ Rayleigh'a.

Явленія диффракціи.

Значеніе волновой функціи φ_0 въ какой нибудь точкѣ пространства представлялось интеграломъ

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi}\int \Omega \, ds,$$

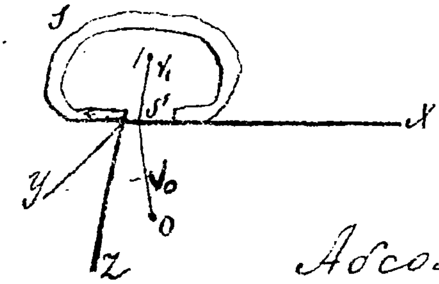
который брался по нѣкоторой поверхности, окружающей свѣтовые центры. Для одной свѣтящейся точки мы нашли

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{2\pi}{\lambda r_1 r_0}\left(\frac{dr_1}{dn} - \frac{dr_0}{dn}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) ds,$$

гдѣ r_1 - разстояніе свѣтящихся точекъ отъ поверхности и r_0 - разстояніе поверхности отъ точки o.

Мы примѣнимъ эту формулу къ случаю ширмы, съ нѣсколькими отверстіями (на первое время — однимъ), ширмы, окружающей свѣтящуюся точку. Точка О находится по другую сторону ширмы.

Пусть S' есть воображаемая поверхность, занимающая наше отверстіе, а S — черная поверхность ширмы.



Абсолютно черную поверхность мы опредѣляемъ какъ такую, которая не можетъ вліять на колебательное состояніе эфира въ окружающемъ пространствѣ; поэтому интегралъ, взятый по ней, равенъ 0. Слѣдоват.

колебанія въ точкѣ O будутъ зависѣть исключительно отъ колебательнаго состоянія поверхности s'

Разстоянія r_0 и r_1 должны быть велики сравнительно съ размѣрами отверстія S. Плоскость s' примемъ за плоскость координатъ xy, ось z будетъ къ ней перпендикулярна. Входящія въ φ_0 величины $\frac{dr_1}{dn}$ и $\frac{dr_0}{dn}$ представляютъ cos'ы угловъ, образуемыхъ нормалью къ s' съ r_1 и r_0. Эти cos'ы, а также r_1 и r_0 будутъ измѣняться весьма мало при переходѣ концовъ r_1 и r_0 по точкамъ плоскости s', поэтому мы ихъ можно вынести за знак интеграла и вмѣстѣ съ другими постоянными членами включить въ одномъ символѣ A.

$$\varphi_0 = A\int \cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)ds' . \quad ds'=dx.dy.$$

Путь перемѣщенія по осямъ

координатъ суть u, v и w; останавливаясь на колебаніяхъ поперечныхъ, мы по теоремѣ Клебша можемъ эти перемѣщенія представить такъ:

$$u = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy};$$

$$v = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz},$$

$$w = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}.$$

Положимъ, что изъ этихъ волновыхъ функцій у насъ существуетъ только одна w, такъ что $w_0 = f_0$. Въ точкѣ O колебанія представятся перемѣщеніями

$$u_0 = -\frac{dw_0}{dy_0} \text{ и } v_0 = \frac{dw_0}{dx_0},$$

гдѣ x_0, y_0 суть координаты точки O, входящія только въ f_0, а потому и въ A. Поэтому, составляя производныя отъ w по x_0 и y_0, получимъ выраженія слѣдующаго вида:

$$u_0 = A_1\int \sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)ds' + B_1\int \cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)ds'$$

$$v_0 = A_2 \;\ldots\ldots\; + B_2 \;\ldots\ldots$$

Насъ интересуетъ вопросъ о напряженіи свѣта въ точкѣ С. Оно можетъ измѣряться или средней кинетической энергіей колебаній въ точкѣ О за періодъ полнаго колебанія или же полной энергіей, которая вдвое больше средней.

Чтобы найти кинетическую энергію колебанія, надо найти его скорость, то есть дифференцировать u_0 и v_0 по t. Полученныя вновь производныя u_0' и v_0' будутъ имѣть тотъ же видъ, что и u_0 и v_0, только измѣнятся A и B.

Затѣмъ надо составить среднюю живую силу колебаній за время равное періоду T, то есть умножить плотность въ данномъ мѣстѣ, именно въ точкѣ O на $U_0'^2+V_0'^2$ и dt и составить сумму нашихъ выраженій для промежутка T, раздѣливъ ее на этотъ промежутокъ. Напряженіе свѣта въ точкѣ O представляется такимъ образомъ выраженіемъ

$$J_0 = \frac{\rho}{2T}\int_0^T (U_0'^2+V_0'^2)dt \; (C).$$

Обозначимъ $\frac{2\pi}{\lambda}(r_1+r_0)$ черезъ α и $-2\pi\frac{t}{T}$ черезъ β; U_0' и V_0' будутъ содержать интегралы вида

$$\iint \sin(\alpha+\beta)ds \text{ и } \iint \cos(\alpha+\beta)ds.$$

Основываясь на томъ, что въ данномъ случаѣ тригонометрическія величины, содержащія t, можно вынести за знакъ интеграла, мы ихъ представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos\beta\iint \sin\alpha\, ds+\sin\beta\iint \cos\alpha\, ds = \cos\beta . S+\sin\beta\, C \quad \text{и}$$

$$\mathrm{cs}\beta\iint \mathrm{cs}\alpha\, ds - \mathrm{sn}\beta\iint \mathrm{sn}\alpha\, ds = \mathrm{cs}\beta\, c - \mathrm{sn}\beta\, s.$$

Эти выраженія должны быть внесены въ выраженіе живой силы (с).

$$U_0' = A_3\iint \mathrm{cs}(\alpha+\beta)\, ds + B_3\iint \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\, ds$$

$$V_0' = A_4\iint \mathrm{cs}(\alpha+\beta)\, ds + B_4\iint \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\, ds.$$

$$J_0 = \frac{\rho}{2\tau}\int_0^T \left\{ \begin{aligned} &(A_3^2+A_4^2)\left[\iint \mathrm{cs}(\alpha+\beta)\, ds\right]^2 + \\ &+(B_3^2+B_4^2)\left[\iint \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\, ds\right]^2 + \\ &+2(A_3B_3+A_4B_4)\iint \mathrm{cs}(\alpha+\beta)\iint \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\, ds \end{aligned} \right\} dt =$$

$$= \frac{\rho}{2\tau}\int_0^T dt \left\{ A(s\,\mathrm{cs}\beta + c\,\mathrm{sn}\beta)^2 + B(c\,\mathrm{cs}\beta - s\,\mathrm{sn}\beta)^2 + \right.$$
$$\left. + \xi\left[(sc\,\mathrm{cs}^2\beta + (c^2-s^2)\mathrm{cs}\beta\,\mathrm{sn}\beta - sc\,\mathrm{sn}^2\beta\right] \right\}$$

Такъкакъ

$$\int_0^T \mathrm{cs}2\beta\, dt = \int_0^T \mathrm{sn}2\beta\, dt = 0 \quad \text{и}$$

$$\int_0^T \mathrm{cs}^2\beta\, dt = \int_0^T \frac{1+\mathrm{cs}2\beta}{2}dt = \frac{T}{2} = \int_0^T \mathrm{sn}^2\beta\, dt =$$
$$= \int_0^T \frac{1-\mathrm{cs}2\beta}{2}dt, \quad \text{то}$$

$$J_0 = \frac{\rho}{2\tau}\left\{ A\frac{T}{2}(s^2+c^2) + B\frac{T}{2}(c^2+s^2) + \xi\left(sc\cancel{\frac{T}{2}} - sc\cancel{\frac{T}{2}}\right)\right\}$$

Окончательно $\underline{J_0 = A(c^2+s^2)}$.

Это и есть основное уравненіе диффракціи, дающее зависимость между формой отверстія и напряженіемъ свѣта.

Напомнимъ, что у насъ

$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1+r_0)$, $c=\iint cs\alpha\, ds$, $s=\iint sn\alpha\, ds$ и

напряженіе свѣта въ точкѣ O $J_0=A(c^2+s^2)$. Въ вопросѣ, который теперь будетъ насъ интересовать, именно, въ вопросѣ о minimum'ѣ и maximum'ѣ свѣта, A не играетъ никакой роли.

Остановимся на свойствахъ интеграловъ c и s. Прибавимъ къ аргументу α нѣкоторое δ = const и новые интегралы обозначимъ черезъ $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{C}=\iint cs(\alpha+\delta)ds = c.cs\delta - s\,sn\delta$$

$$\mathcal{S}=sn(\alpha+\delta)ds = s.cs\delta + c.sn\delta.$$

Возвысимъ оба выраженія въ квадратъ и сложимъ, послѣ сокращенія

$$\mathcal{C}^2+\mathcal{S}^2=c^2+s^2.$$

Значитъ сумма квадратовъ c и s, пропорціональная силамъ свѣта, не измѣняется отъ прибавленія къ аргументу α подъинтегральной функціи какой нибудь постоянной величины δ.

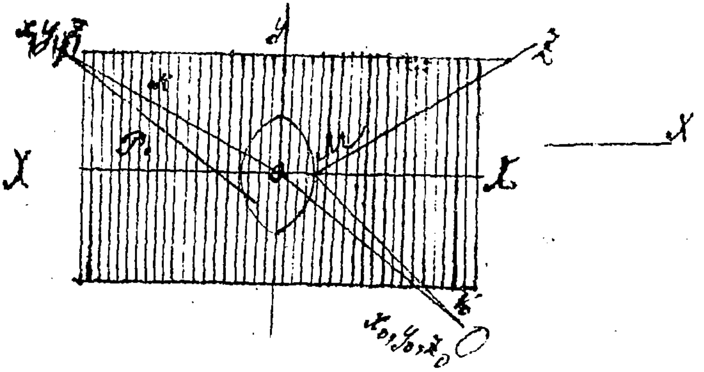
Этимъ свойствомъ мы и будемъ пользоваться.

Преобразуемъ интегралы C и S:

$$C = \iint \cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 + r_0)\,ds,$$

$$S = \iint \sin\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 + r_0)\,ds,$$

сохраняя неизмѣнными всѣ прежнія условія и обозначенія.



Пусть координаты точекъ I и O будутъ соотвѣтственно x_1, y_1, z_1 и x_0, y_0, z_0, а координаты какой либо точки M отверстія, не совпадающей съ началомъ координатъ — $x, y, 0$, разстоянія точекъ 1 и 0 отъ начала координатъ обозначимъ черезъ ρ_1 и ρ_0. Тогда

$$r_1 = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+z_1^2} =$$

$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-2(x_1x+y_1y)+(x^2+y^2)} =$$

$$= \sqrt{\rho_1^2-2(x_1x+y_1y)+(x^2+y^2)}\,.$$

Вынося ρ_1 изъ подъ знака радикала и разлагая подкоренное количество по биному Ньютона, получимъ:

$$r_1 = \rho_1\sqrt{1-\frac{2(x_1x+y_1y)}{\rho_1^2}+\frac{x^2+y^2}{\rho_1^2}} =$$

$$= \rho_1 - \frac{x_1x+y_1y}{\rho_1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y_2}{\rho_1}\,;$$

остальными членами разложенія мы пренебрегаемъ, потому что ρ_1, ρ_0 по условію очень велики, сравнительно съ размѣрами отверстія.

Подобнымъ же образомъ:

$$r_0 = \rho_0 - \frac{x_0x+y_0y}{\rho_0} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{\rho_0}$$

Слѣдоват:

$$r_1+r_0 = \rho_1+\rho_0 - x\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}\right) - y\left(\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right) \;.\;.\; \mathrm{I}.$$

Умноживъ найденную силу r_1+r_0 на $\frac{2\pi}{\lambda}$, получимъ аргументъ cos и sin, входящихъ въ c и s, а такъ какъ величина напряженія свѣта, какъ доказано выше, не измѣняется отъ увеличенія аргумента на постоянную величину, то мы вправѣ отнять отъ полученнаго аргумента величину $\frac{2\pi}{\lambda}(\rho_1+\rho_0)$ = const. Тогда искомый аргументъ будетъ:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1+r_0)=\frac{2\pi}{\lambda}\left[-x\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}\right)-y\left(\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Такъ какъ мы не дѣлаемъ никакихъ ограниченій относительно величины и формы отверстія ширмы, то эта формула даетъ аргументъ при всякомъ отверстіи. Въ частномъ случаѣ, когда отверстіе очень мало, сумма x^2+y^2, которая множится у насъ на малую величину $\frac{1}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_1}$, сама очень мала; поэтому въ случаѣ диффракціи, при весьма маломъ отверстіи (первая группа явленій диффракціи), мы можемъ пренебречь членомъ:

$$\frac{\pi}{\lambda}(x^2+y^2)\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right).$$

Эти явленія открыты и изслѣдованы Фраунгоферомъ, теорія же ихъ принадлежитъ Шверду. Если же отверстіе шириною не такъ мало сравнительно съ разстояніями ρ_1 и ρ_0, то значеніе аргумента (a) сохраняется цѣликомъ. Явленія эти составляютъ вторую группу явленій диффракціи и открытіемъ своимъ обязаны Френелю. Первая группа извѣстна еще подъ названіемъ явленій диффракціи въ параллельномъ свѣтѣ, вторая — въ сходящемся свѣтѣ.

Разсмотримъ Фраунгоферову диффракцію. Въ этомъ случаѣ

$$C = \int \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[-x\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}\right)-y\left(\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right)\right] ds,$$

$$S = \iint \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left[-x\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}\right)-y\left(\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right)\right] ds.$$

Назовемъ черезъ α_1 и β_1 косинусы угловъ продолженія линіи ρ_1 съ осями x, y и черезъ α_0, β_0 косинусы угловъ линіи ρ_0, считаемой отъ начала координатъ въ направленіи къ точкѣ O, съ тѣми же осями тогда

$$\mathrm{Cos}(\rho_1 x) = \frac{x_1}{\rho_1} = -\alpha_1;$$
$$\mathrm{Cos}(\rho_1 y) = \frac{y_1}{\rho_1} = -\beta_1;$$
$$\mathrm{Cos}(\rho_0, x) = \frac{x_0}{\rho_0} = \alpha_0;$$
$$\mathrm{Cos}(\rho_0, y) = \frac{y_0}{\rho_0} = \beta_0.$$

Кромѣ того $ds = dx.dy$. Слѣд.:

$$C = \iint \mathrm{Cos} \frac{2\pi}{\lambda}\left[x(\alpha_1-\alpha_0)+y(\beta_1-\beta_0)\right] ds = \iint \cos(px+qy)\,dx\,dy.$$
$$S = \iint \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left[x(\alpha_1-\alpha_0)+y(\beta_1-\beta_0)\right] ds = \iint \sin(px+qy)\,dx\,dy.$$

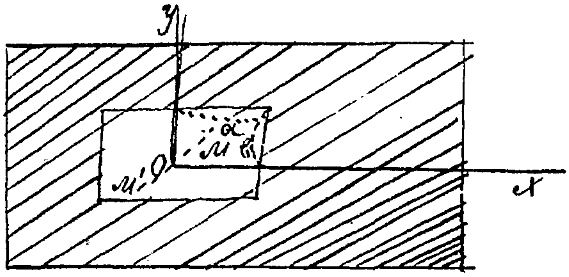
гдѣ для краткости положено

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_1-\alpha_0),\ q = \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_1-\beta_0)\ \ .\ .\ .\ (B)$$

Приложимъ эту теорію къ случаю прямоугольнаго отверстія, въ центрѣ котораго находится начало координатъ; стороны же $2a$ и $2b$

Круглое отверстие См. Volkmann с. 165

параллельна осямъ, при чемъ 2а·2в.



Интегралы c и s будутъ браться въ предѣлахъ отъ -a до +a и отъ -в до +в. Такъ какъ для каждой точки M(x,y) отверстія существуетъ симметричная точка M'(-x,-y) то подъинтегральное выраженіе интеграла s будетъ состоять изъ суммы положительныхъ и отрицательныхъ синусовъ отъ однихъ и тѣхъ же аргументовъ, что въ результатѣ дастъ 0. Слѣд. s=0 и

$$J = AC^2.$$

Вычислимъ C². Мы имѣемъ

$$c = \int_{-a}^{+a}\int_{-в}^{+в} \cos(px+qy)\,dx\,dy,$$

но

$$\int_{-a}^{+a}\cos(px+qy)\,dx = \frac{1}{p}\Big[_{-a}^{+a}\sin(px+qy) =$$

$$= \frac{1}{p}\Big[\sin(p\underset{+a}{x}+qy) - \sin(+p\underset{-a}{x}+qy)\Big] =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\sin(pa+qy)+\sin(pa-qy)\right] =$$
$$= \frac{2}{p}\sin pa . \cos qy;$$

поэтому

$$C = \int_{-b}^{+b} \frac{2}{p} \sin pa \cos qy\, dy = \frac{2}{p}\sin pa \int_{-b}^{+b} \cos qy\, dy.$$

и такъ какъ

$$\int_{-b}^{+b} \cos qy\, dy = \frac{1}{q}\int_{-b}^{+b} \sin qy = 2/q \sin qb,$$

то

$$C = 4\,\frac{\sin pa}{p}\,\frac{\sin qb}{q}.$$

Такимъ образомъ

$$J = A . 4^2 \left(\frac{\sin pa}{p}\right)^2 . \left(\frac{\sin qb}{q}\right)^2.$$

Умноживъ и раздѣливъ правую часть этого уравненія на $(ab)^2$, обозначивъ всѣ постоянные множители буквою C, получимъ законъ свѣтового напряженія для случая прямоугольнаго отверстія въ окончательной формѣ:

$$J = C \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 . \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2.$$

Если $p = 0$, $q = 0$, то $\lim . \frac{\sin pa}{pa} = \lim . \frac{\sin qb}{qb} = 1$, и слѣдоват. $J_0 = C = \text{const.}$ и $J = J_0 \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 . \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2$.

Лит. общ. распр. пол. книгъ.

Но если $p=q=0$, то $\alpha_1=\alpha_0$, $\beta_1=\beta_0$ и ρ_1 совпадаетъ съ ρ_0 въ одну прямую. Слѣдовательно, точка O лежитъ на прямой, идущей отъ свѣтящейся точки 1 черезъ центръ отверстія и освѣщается непосредственно источникомъ свѣта. Очевидно, что I будетъ измѣняться въ зависимости отъ p и q, а потому освѣщеніе различныхъ точекъ пространства будетъ различно. Минимумъ освѣщенія $I=0$ наступаетъ, когда $pa = \pm h\pi$, или $qb=\pm h\pi$, гдѣ $h=1..2..3...$ и такъ какъ изъ уравненія (в):

$$\alpha_0=\alpha_1 \mp \frac{h\lambda}{2a}\,;\quad \beta_0=\beta_1\pm\frac{h\lambda}{2b}$$

и при данномъ h правая части суть величина постоянная, то слѣдовательно для минимума освѣщенія α_0 и β_0 постоянны.

Опишемъ изъ центра отверстія (начало координатъ) сферу весьма большимъ радіусомъ ρ_0 и конечную часть этой сферы, окружающую точку пересѣченія ея съ продолженіемъ линіи ρ_1, т. е. съ непосредственно идущими чрезъ центръ отверстія лучами, будемъ разсматривать какъ плоскій экранъ, параллельный ширмѣ. Изслѣдуемъ свѣтовыя явленія на этомъ экранѣ. Для различныхъ положеній точки O на немъ величина ρ_0 будетъ постоянной, а потому и для минимума свѣта $x_0 = \alpha_0\rho_0$, $y_0 = \beta_0\rho_0$ будутъ постоянны.

Такимъ образомъ на экранѣ будемъ имѣть центральную точку O, освѣщеніе которой J_0. Минимумъ освѣщенія $J = 0$ будетъ имѣть при

$$x_0 = \alpha_0\rho_0 = \left(\alpha_1 \mp \frac{n\lambda}{2a}\right)\rho_0 \quad \ldots \quad (1.)$$

или

$$y_0 = \beta_0\rho_0 = (\beta_1 \mp n\lambda/2b)\rho_0 \quad \ldots \quad (2).$$

Уравненія (1) и (2) представляютъ плоскости соотвѣтственно перпендикулярныя къ осямъ x и y. Давая h значенія 1, 2, 3..., мы получимъ рядъ плоскостей, параметры которыхъ будутъ различаться на $\pm\frac{h\lambda}{2a}$. Пересѣченіе плоскостей (1) съ экраномъ (сферой) дастъ рядъ темныхъ линій параллельныхъ оси y, а пересѣченіе плоскостей (2) — рядъ прямыхъ параллельныхъ оси x. Такимъ образомъ весь экранъ будетъ разбитъ темными линіями на прямоугольники.

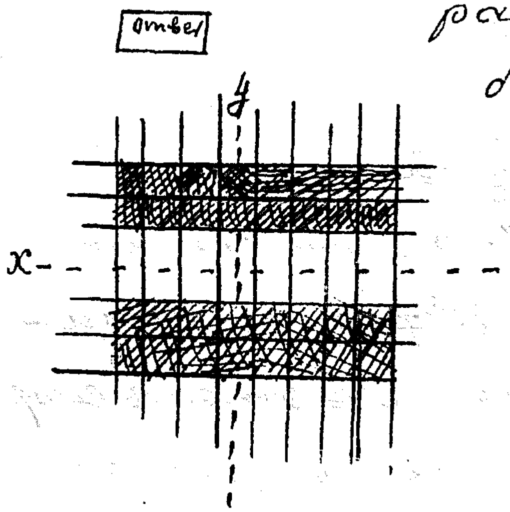
Разстояніе между какими либо двумя плоскостями $x_0' = \left(\alpha_1 \mp \frac{\lambda h}{2a}\right)\rho_0$ и $x_0'' = \left[\alpha_1 \mp \frac{(h+1)\lambda}{2a}\right]\rho_0$ будетъ

$$x_0'' - x_0' = \frac{\lambda}{2a}\rho_0,$$

точно также

$$y_0'' - y_0' = \frac{\lambda}{2b}\rho_0$$

то есть разстояніе между двумя плоскостями прямо пропорціонально длинѣ волны и обратно пропорціонально сторонѣ прямоугольнаго отверстія, соотвѣтствующей разсматриваемой координатѣ. Слѣдовательно, во первыхъ, прямоугольныя клѣтки на экранѣ въ красномъ свѣтѣ будутъ болѣе велики, чѣмъ въ фіолетовомъ, ибо длина волны въ первомъ случаѣ болѣе, чѣмъ во второмъ, и во вторыхъ, темныя линіи, параллельныя оси x, будутъ далѣе отстоять другъ отъ друга, чѣмъ линіи, параллельныя оси y (при условіи a > b), т. е. прямоугольники будутъ имѣть размѣры, обратные размѣрамъ отверстія. Клѣтки, центры коихъ лежатъ на осяхъ x и y, будутъ вдвое больше остальныхъ. Максимумъ свѣтового напряженія будетъ соотвѣтствовать тѣмъ точкам



экрана, для которыхъ

$$J = J_0 \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2 \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \text{ maximum},$$

что обусловливается maximumомъ одного изъ факторовъ $\left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2$ и $\left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2$. Обозначимъ сначала pa, а потомъ qb черезъ u и отыщемъ maximum $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$; для этой цѣли рѣшимъ ур-іе

$$\frac{d}{du}\left[\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\right] = 0.$$

или

$$\frac{2\sin u}{u} \cdot \frac{u\cos . u - \sin u}{u^2} = 0.$$

Если $\frac{\sin u}{u} = 0$, то $J = 0 =$ ~~maximum~~ minimum. Если же $\frac{\sin u}{u} \neq 0$ и $u^2 \neq \infty$, то $u\cos u - \sin u = 0$, или $\operatorname{tg} u = u$. Въ этомъ случаѣ $J \neq 0$, слѣдовательно, уравненіе $\operatorname{tg} u = u$ есть условіе максимума J, и корни этого трансцендентнаго уравненія дадутъ намъ положеніе максимумовъ свѣта на экранѣ. Первый корень есть $u = 0$, но $u = 0$ даетъ $p = 0$ или $q = 0$, слѣдовательно мы возвращаемся къ случаю, когда $J_0 = \text{const}$, то есть когда освѣщенная точка лежитъ непосредственно на падающемъ лучѣ или на осяхъ x, y (см. предыдущій чертежъ). Такимъ образомъ первые максимумы свѣта находятся въ центрахъ прямоугольниковъ, лежащихъ на осяхъ x и y. Давая u рядъ послѣдовательныхъ значеній отъ 0° до π, мы замѣтимъ, что второй корень не можетъ принадлежать первой четверти окружности, ибо въ этой четверти c $u < tg\,u$; во второй и четвертой четвертяхъ его также не будетъ, ибо дуги и тангенсы здѣсь съ противоположными знаками; остается третья четверть, гдѣ и будетъ находиться второй корень. Третій корень уже можетъ лежать въ первой четверти, если дуга продолжаетъ наростать сверхъ 2π; четвертой лежитъ опять въ $3^{ей}$ и т. д.

Такимъ образомъ при непрерывномъ нарастаніи дуги U ея тангенсъ стремится къ ∞, а такъ какъ tgU можетъ стремиться къ ∞ только при приближеніи дуги U къ $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, то слѣдовательно $\lim U=(2n+1)\pi/2$. Швердъ вычислилъ корни уравненія $tgU=u$ въ доляхъ π и нашелъ:

$$U_0 = 0, \quad U_3 = 3,4709\pi,$$
$$U_1 = 1,4393\pi, \quad U_4 = 4,4774\pi,$$
$$U_2 = 2,4590\pi, \quad U_5 = 5,4818\pi,$$
$$U_6 = 6,4844\pi \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

легко замѣтить, что эти корни идутъ почти по закону

$$U = \frac{2n+1}{2}\pi,$$

ибо, напримѣръ, при $n=7$ получается $U=7,5\pi$, а по Шверду $U_7 = 7,4865\pi$.

Комбинируя значенія $pa=U_1\, U_2 \ldots$ со значеніями $qb=U_1, U_2$, мы получимъ всѣ возможныя значенія максимумовъ J, которые будутъ расположены внутри выше найденныхъ пря моугольныхъ клѣтокъ. Чѣмъ дальше максимумъ отъ центра экрана, тѣмъ онъ слабѣе. Законъ ихъ убыванія на оси x найдемъ, полагая $\alpha=0$, тогда $\beta_0=\beta_1$, $\frac{\sin \alpha b}{\alpha b}=1$ и максимумъ будетъ обусловливаться факторомъ $\left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2$. Если $pa=\frac{2n+1}{2}\pi$, то

$$J = J_0\left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 = J_0\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2},$$

то есть *напряженіе убываетъ обратно пропорціонально квадрату нечетныхъ чиселъ*.

Тотъ же законъ справедливъ и для maximum'овъ, параллельныхъ оси y. Полагая $pa=\alpha b$, мы получимъ законъ убыванія maximum'овъ по діагоналямъ, проходящимъ черезъ точку O; именно:

$$J = J_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 = J_0\frac{4^2}{(2n+1)^4\pi^4},$$

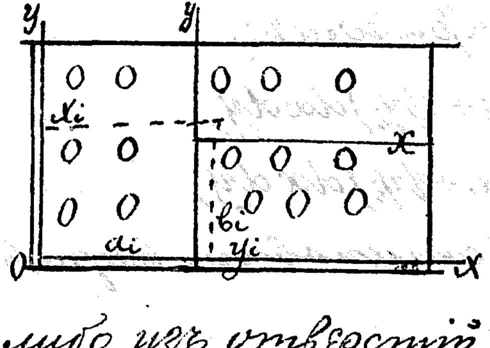
то есть *напряженіе свѣта по діагоналямъ измѣняется обратно* пропорціонально четвертой степени нечетныхъ чиселъ, а потому быстрѣе, чѣмъ по обѣимъ x и y. Такимъ образомъ явленіе производитъ впечатлѣніе креста, составленнаго изъ свѣтлыхъ пятенъ, раздѣленныхъ темными линіями (см. чертежъ выше). Если свѣтъ, проходящій чрезъ отверстіе, будетъ бѣлый, т. е. будетъ состоять изъ волнъ различной длины, то явленіе на экранѣ будетъ окрашенное. Если ра равно одному изъ корней U_n, то $\frac{2\pi}{\lambda}\times$ $\times(\alpha_0-\alpha_1)a=U_n$, $\alpha_0-\alpha_1=\frac{\lambda}{2\pi a}U_n$; слѣдоват. разстояніе максимумовъ пропорціонально длинѣ волны, и въ мѣстахъ максимумовъ мы получимъ спектры, фіолетовые лучи которыхъ лежатъ ближе къ центру, а красные дальше.

Если прямоугольное отверстіе,

удлиняясь по оси y, обратится въ узкую щель, то разстояніе $\frac{\lambda}{2b}\rho_0$ между темными линіями, параллельными оси x, сдѣлается настолько мало, что мы не будемъ въ состояніи различить ихъ другъ отъ друга; тогда на экранѣ увидимъ темныя полосы, параллельныя оси y, между которыми лежатъ максимумы свѣта, постепенно убывающіе вправо и влѣво. —

Перейдемъ къ разсмотрѣнію явленій диффракціи въ случаѣ нѣсколькихъ отверстій въ ширмѣ.

Пусть на темной ширмѣ имѣемъ рядъ равныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ отверстій и



пусть x, y будутъ координаты перемѣнной точки какого либо изъ отверстій относительно точки, принятой за центръ отверстія. Если координаты этого центра относительно общей системы координатъ назовемъ черезъ a_i, b_i, то координаты x_i, y_i, z_i данной точки i-го отверстія будутъ равны:

$$x_i = a_i + x;$$

$$y_i = b_i + y.$$

Предположимъ, что позади ширмы находится свѣтящаяся точка, посылающая пучекъ лучей черезъ отверстія ширмы. Напряженія свѣта представятся формулою

$$J = K(c^2 + s^2),$$

гдѣ интегралы c и s должны быть распространены по всѣмъ отверстіямъ. Такимъ образомъ:

$$c = \Sigma \iint_i \cos px_i + qy_i)\,dx\,dy,$$

$$s = \Sigma \iint_i \sin(px_i + qy_i)\,dx\,dy,$$

или послѣ подстановки выраженій для x_i, y_i:

$$c = \Sigma \iint_i \cos(pa_i + qb_i + px + qy)\,dx\,dy =$$
$$= \Sigma \cos(pa_i + qb_i) \iint \cos(px + qy)\,dx\,dy -$$
$$- \Sigma \sin(pa_i + qb_i) \iint \sin(px + qy)\,dx\,dy,$$
$$s = \Sigma \sin(pa_i + qb_i) \iint \cos(px + qy)\,dx\,dy +$$
$$+ \Sigma \cos(pa_i + qb_i) \iint \sin(px + qy)\,dx\,dy.$$

полагая

$$\iint \cos(px + qy)\,dx\,dy = c',$$
$$\iint \sin(px + qy)\,dx\,dy = s',$$

гдѣ интегралы должны быть взяты по каждому изъ отверстій, будемъ имѣть:

$$c = \Sigma[\cos(pa_i + qb_i)c' - \sin(pa_i + qb_i)s'],$$
$$s = \Sigma[\sin(pa_i + qb_i)c' - \cos(pa_i + qb_i)s'],$$

а такъ какъ c' и s' одинаковы для всѣхъ отверстій (разсматриваемъ отверстія равныя и сходственно расположенныя), то ихъ можно вынести за знаки суммъ, и слѣдовательно

$$c = c'C - s'S; \quad s = c'S + s'C,$$

гдѣ $C = \Sigma \cos(pa_i + qb_i)$; $S = \Sigma \sin(pa_i + qb_i)$.

Такимъ образомъ

$$J=K(c'^2+s'^2)(C^2+S^2),$$

ибо

$$\mathcal{C}^2+\mathcal{S}^2=C'^2(C^2+S^2)+S'^2(C^2+S^2)=(C'^2+S'^2)(C^2+S^2).$$

Первой факторъ $K(c'^2+s'^2)$ выражаетъ напряженiе J' свѣта, обусловливаемое однимъ отверстiемъ, слѣд.

$$J=J'(C^2+S^2).$$

Ясно, что maximum и minimum напряженiя будетъ обусловливаться максимумомъ и минимумомъ факторовъ $J'(C^2+S^2)$. Первой фактор нами достаточно изслѣдованъ для случая прямоугольнаго отверстiя или же щели; остается поэтому только разсмотрѣть влiянiе фактора (C^2+S^2), зависящаго отъ совокупности отверстiй. Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ перваго отверстiя; кромѣ того для удобства изслѣдованiй предполоясимъ, что центры отверстій расположены на одной прямой и примемъ эту послѣднюю за ось x. Тогда, называя взаимныя расположенія центровъ черезъ e, будемъ имѣть:

$$a_1 = 0, a_2 = e, a_3 = 2e \ldots a_n = (n-1)e,$$

$$b_i = 0, b_2 = 0, b_3 = 0 \ldots\ b_n = 0.$$

Въ данномъ случаѣ

$$C = \Sigma \cos pa_i = 1 + \cos pe + \cos 2pe \ldots + \cos(n-1)pe.$$

Умножая обѣ части этого уравненія на $2\cos pe$ и принимая во вниманіе равенство $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ получимъ

$$2\cos pe = [\cos pe + \cos 2pe + \cos 3pe \ldots + \cos npe] +$$

$$+ [\cos pe + 1 - \cos pe \ldots + \cos(n-2\cancel{pe})pe]$$

или

$$2C \# \cos pe = 2C - 1 + \cos pe + \cos pe - \cos(n-1)pe;$$

откуда

$$2C[1 - \cos pe) = 1 - \cos pe + \cos(n-1)pe - \cos npe$$

или

$$2C\,2\sin^2\frac{pe}{2} = 2\sin^2\frac{pe}{2} + 2\sin\frac{(2n+1)pe}{2}\sin pe/2,$$

или еще

$$2C\sin\frac{pe}{2} = \sin\frac{pe}{2} + \sin\frac{(2n-1)pe}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{npe}{2}\cos\frac{(n-1)pe}{2},$$

а потому

$$C = \frac{\sin\frac{npe}{2}}{\sin\frac{pe}{2}} \cdot \cos(n-1)\frac{pe}{2}$$

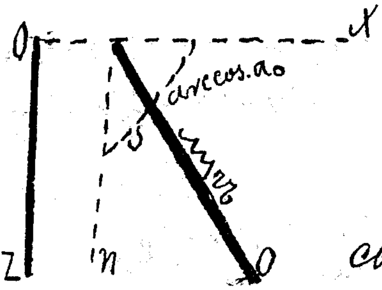
Подобнымъ же образомъ

$$S = \frac{\sin\frac{npe}{2}}{\sin\frac{pe}{2}} \cdot \sin(n-1)\frac{pe}{2}$$

Слѣдовательно

$$J = J'\left(\frac{\sin\frac{npe}{2}}{\sin\frac{pe}{2}}\right)^2,$$

и мы видимъ, что второй факторъ выраженія J не зависитъ при данныхъ условіяхъ отъ формы отверстій щели.



Предположимъ для простоты, что лучи, посылаемые свѣтящейся точкой, нормальны къ ширмѣ, т. е. $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$, и что явленіе разсматривается въ плоскости, проходящей черезъ ось x, и перпендикулярной ширмѣ. Тогда $\beta_0 = 0$, $\alpha = 0$,

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\delta, \text{ слѣдов.}$$

$$J = J'\left(\frac{\sin\left[\frac{n\pi e}{\lambda}\sin\delta\right]}{\sin\left[\frac{\pi e}{\lambda}\sin\delta\right.}\right)^2$$

Максимумъ и минимумъ освѣщенія будетъ обусловливаться максимумомъ и минимумомъ J. Опредѣлимъ сначала максимумъ и минимумъ второго фактора, такъ какъ способы изслѣдованія максимума и минимума перваго фактора были указаны выше. Пусть $\frac{\pi e}{\lambda}\sin\delta = z$; тогда второй факторъ представится выраженіемъ $\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2$.

Лит: Общ. физико-техн. кружкъ.

Условіе его максимума и минимума будетъ

$$\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2\right]=0\text{, или}$$

$$\frac{\sin nz}{\sin z}\cdot\frac{n\sin z.\cos nz-\sin nz.\cos z}{\sin^2 z}=0.$$

Минимумы опредѣлятся изъ уравненія $\frac{\sin nz}{\sin z}=0$; величина I для z, ему удовлетворяющихъ, будетъ равна 0. Приведенное условіе выполнится, когда $\sin nz=0$ и притомъ $\sin z\neq 0$, то есть когда $nz=k\pi$, гдѣ k есть цѣлое число, не дѣлящееся на n (въ противномъ случаѣ получимъ $0/0$), именно:

$$k=\begin{cases}1,2,3,\ ,\ ,\ ,(n-1)\ldots \text{ minim. } 1^{\text{го}} \text{ пор.}\\ (n+1),(n+2)\ldots(2n-1)\ldots \text{ min. } 2^{\text{го}} \text{ порядка.}\end{cases}$$

$$k=\begin{cases}(2n+1),(2n+2)\ldots \quad \text{min. } 3^{\text{го}} \text{ пор.}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Максимумы получатся изъ ур-ія

$$\frac{n\sin z\cos nz-\sin nz\cos z}{\sin^2 z}=0,$$

откуда

$$n\,tg\,z = tg\,nz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

ибо $\sin^2 z$ есть величина конечная.

Уравненіе (1) удовлетворяется всѣми тѣми значеніями z, которыя обращаютъ въ нуль одновременно $tg z$ и $tg nz$, т. е. при

$$z = \frac{\pi e}{\lambda}\sin\delta = m\pi.$$

или

$$\sin\delta = \frac{m\lambda}{e},$$

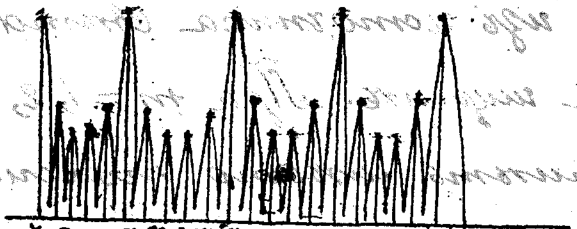
гдѣ m есть цѣлое число. Положивъ $m=0$, и $\delta=0$, мы получимъ лучи, идущіе непосредственно изъ источника свѣта и перпендикулярные ширмѣ. При $m = 1, 2, 3, \ldots$ будутъ имѣть мѣсто максимумы $I^{го}$ порядка.

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что истинное значеніе отношенія $\frac{\sin nz}{\sin z} = 0/0$ есть n, будемъ имѣть:

$$I_{max.} = n^2 J'.$$

Эти максимумы соотвѣтствуютъ тѣмъ значеніямъ $k = 0, n, 2n, 3n \ldots,$

которая не помѣщена въ приведенной выше таблицѣ для к; между двумя такими значеніями для к, т. е. между двумя максимумами перваго порядка, какъ показываетъ эта таблица, лежитъ n-1 минимумовъ. Эти свѣтовыя явленія можно изобразить геометрической схемой, откладывая на оси абсциссъ значенія z, а на координатахъ соотвѣтственное свѣтовое напряженіе.

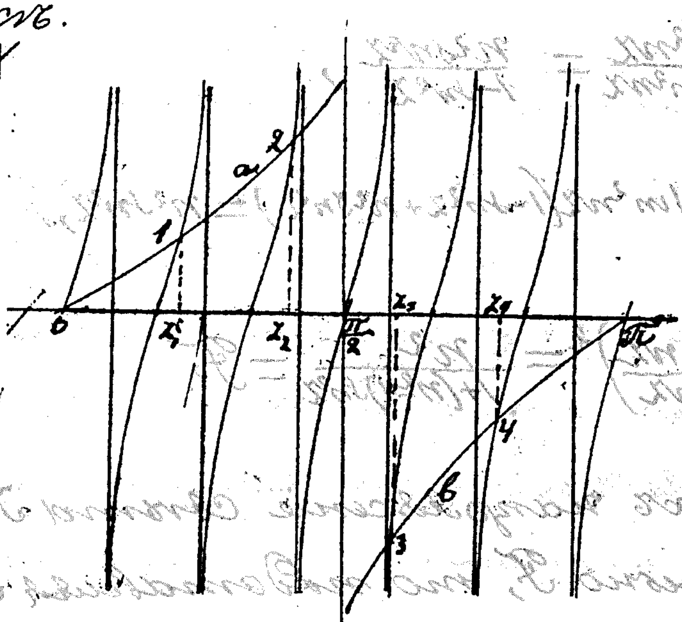


Между значеніями max-овъ при $z=0$ и $z=\pi$, $z=\pi$ и $z=2\pi$ по обѣ стороны отъ $z=0$ будетъ находиться по $(n-1)$ minim'овъ, какъ показано это на чертежѣ для случая $n=6$.

Но мы можемъ удовлетворить уравнію (1) еще и иначе. Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ $y = tg\,nz$, $y' = n\,tg\,z$ и построимъ двѣ кривыя, выражаемыя этими уравненіями, то абсциссы точекъ пересѣченія ихъ и будутъ корнями ур-ія (1). Отложимъ на произвольной прямой, принимаемой нами за ось абсциссъ отъ начала координатъ длину π и построимъ кривую $y = tg\,nz$. Мы видимъ прежде всего, что $y = 0$ при $nz = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ или при $z = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{n}, 3\pi/n,$ и $y = \pm\infty$ при $nz = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$ или при $z = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n} \ldots$ въ частномъ случаѣ, когда $n = 6$, при $z = \frac{\pi}{12}$ и $z = \frac{\pi}{12} + C$ (безконечно малая величина), будемъ имѣть соотвѣтственно $y = \pm\infty$ и $y = -\infty$. Слѣдовательно кривая $y = tg\,6z$, состоитъ изъ ряда отдѣльныхъ вѣтвей, которыя приближаются ассимптотически къ положительнымъ или отрицательнымъ ординатамъ, возставленнымъ въ точкѣ $\frac{\pi}{12}$, $\frac{2\pi}{12}$ . . . и т.д.. и пересѣкаютъ ось Z въ точкахъ 0, $\frac{\pi}{6}$, $\pi/3$, и т. д.

Другая кривая $y = 6 tg z$ даетъ на протяженіи отъ $Z = 0$ до $z = \pi$ двѣ вѣтви а и в, приближающiяся асимптотически къ ординатамъ $z = \pi/2$, мы видимъ, что эти кривыя пересѣкаются въ четырехъ точкахъ; слѣдовательно уравненіе (1) на протяженіи z отъ 0 до π имѣетъ 4 корня: z_1, z_2, z_3, z_4; но въ такомъ случаѣ и $\pi+z_1$, $\pi+z_2$, $\pi+z_3$, $\pi+z_4$ и вообще $n\pi+z_1$, $n\pi+z_2$ … суть также корни уравненія (1).

Вообще, если число щелей равно n, то число корней z между 0 и π, π и 2π etc. равно $n-2$, что видно и изъ таблицы для Ko. Слѣдовательно, между максимумами $1^{го}$ порядка, соотвѣтствующими значеніямъ $z=0$, $z=\pi$ … $z=n\pi$ находится еще по $n-2$ максимума въ каждомъ промежуткѣ, что видно и на предыдущемъ чертежѣ.



Эти maxima называются максимумами второго порядка. Замѣтимъ, что значенія z, ихъ опредѣляющія, расположены симметрично относительно средины длины π, раздѣляющей два максимума перваго порядка. Посмотримъ каково напряженіе свѣта въ максимумахъ второго порядка. Ур-іе(1) даетъ:

$$\frac{\sin^2 nz}{\cos^2 nz} = \frac{n^2\sin^2 z}{\cos^2 z},$$ или

$$\frac{\sin^2 nz}{1-\sin^2 nz} = \frac{n^2\sin^2 z}{1-\sin^2 z},$$

откуда $\sin^2 nz(1-\sin^2 z+n^2\sin^2 z) = n^2\sin^2 z$,

или

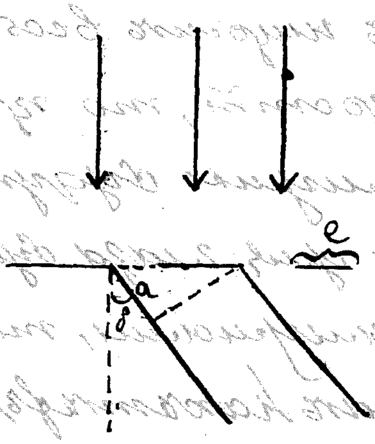
$$\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^2 = \frac{n^2}{1+(n^2-1)\sin^2 z} = F.$$

Такъ какъ напряженіе свѣта I пропорціонально F, то подставляя вмѣсто z различныя его значенія для вторичныхъ максимумовъ, получимъ соотвѣтственное напряженіе. Мы видимъ, что напряженіе свѣта для максимумовъ второго порядка, симметрично расположенныхъ относительно средины промежутка $z=h\pi$ и $z=(h+1)\pi$, будетъ одинаково, ибо для нихъ значенія z разнятся отъ $h\pi+\frac{\pi}{2}$ на одну и ту же величину въ противныя стороны. Напряженіе этихъ максимумовъ возрастаетъ по мѣрѣ ихъ приближенія къ максимумамъ перваго порядка. (См. черт.).

Если имѣемъ въ ширмѣ весьма большое число отверстій, то промежуточные максимумы будутъ диффузны, ибо они для глаза будутъ смѣшиваться съ минимумами, такъ какъ въ этомъ случаѣ какъ тѣхъ, такъ и другихъ будетъ весьма большое число. Слѣдовательно, только максимумы перваго порядка будутъ выдѣляться въ полномъ явленіи. Напряженіе ихъ будетъ очень велико, ибо оно пропорціонально n^2, то есть, квадрату числа отверстій.—

Если имѣемъ диффракціонную рѣшетку, на которую падаетъ пучокъ перпендикулярныхъ лучей, (черт. см. на слѣд. страницѣ) то положеніе максимумовъ перваго порядка обусловливается уравненіемъ:

$Z = \frac{\Pi e\sin\delta}{\lambda} = m\Pi$, гдѣ e - разстояніе между центрами двухъ сосѣднихъ отверстій и δ - уголъ, образуемый отклоненнымъ лучомъ съ нормалью. $e\sin\delta = m\lambda$, Но изъ чертежа видимъ, что $e\sin\delta$ есть не что иное, какъ разность хода двухъ лучей - a. Слѣдовательно, максимумы перваго порядка появляются тогда, когда разность хода $a = m\lambda$ - цѣлому числу волнъ. Этимъ пользуются въ экспериментальной Физикѣ для опредѣленія длины свѣтовой волны при помощи максимумовъ перваго порядка: Именно $\lambda = \frac{e\sin\delta}{m}$. При $m=1$ $(k=n)$ $\lambda = e\sin\delta$.



Если свѣтъ сложный, то вмѣсто отдѣльныхъ свѣтовыхъ и темныхъ полосъ получимъ спектры, расположенные красными полосами снаружи, фіолетовыми внутрь. Эти спектры называются нормальными, ибо въ нихъ отклоненія лучей различнаго цвѣта пропорціональны соотвѣтственнымъ длинамъ волнъ.

Возможенъ случай исчезанія максимума при совпаденіи максимума 2^го фактора съ минимумомъ 1^го фактора J'. Напримѣръ, если отверстія въ ширмѣ имѣютъ форму щелей, то минимумъ для J' опредѣлится условіемъ

$$\sin\delta = \frac{h\lambda}{2a},$$

гдѣ a есть полудлина щели. Слѣд. условіемъ совпаденія будетъ

$$\frac{h\lambda}{2a} = \frac{m\lambda}{e} \text{ или } \frac{h}{2a} = m/e, \text{ что}$$

можно написать, полагая $e=2a+d$, въ видѣ:

$$\frac{2a+d}{2a}=\frac{m}{n} \text{ или}$$

$$\frac{d}{2a}=\frac{m-n}{n}.$$

$m \cdot \; n+n$

Такимъ образомъ если отношеніе $d/2a$ будетъ представлять собою отношеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ, то будетъ происходить исчезновеніе спектра порядка m, равнаго суммѣ двухъ этихъ чиселъ.

Явленія Фраунгоферовой диффракціи наблюдаются въ фокальной плоскости астрономической трубы, предъ объективомъ которой ставится ширма съ отверстіями, и на ширму съ противоположной стороны падаетъ пучекъ параллельныхъ лучей.

Диффракція Френеля.

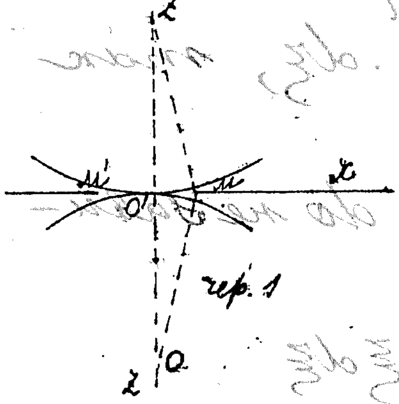
Перейдемъ теперь къ изученію явленій френелевой диффракціи. Эти явленія отличаются отъ предыдущихъ тѣмъ, что онѣ происходятъ на болѣе близкихъ разстояніяхъ и при большихъ отверстіяхъ. Очевидно, что явленія френелевой диффракціи могутъ перейти въ явленія фраунгоферовой диффракціи при увеличеніи разстояній и уменьшеніи величины отверстій и наоборотъ. Такъ какъ въ данномъ случаѣ разстоянія ρ' и ρ_0 не очень велики и координаты точекъ отверстій не весьма малы, то мы не въ правѣ пренебрегать членомъ $\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho_0}\right)$ въ общемъ выраженіи интеграловъ

$$C=\iint\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)-x\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}\right)-y\left(\frac{y}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right)\right\}ds,$$

$$S=\iint\sin\frac{2\pi}{\lambda}\{-- \text{ и д. } \dots \dots$$

Пуассонъ доказалъ, что эти интегралы могутъ быть вычислены точно только для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, напр. для круглаго отверстія, когда свѣтящаяся точка лежитъ на прямой z, перпендикулярной къ плоскости отверстія и проходящей черезъ центръ его. Пуассонъ вычислилъ для этого случая C и S, и нашелъ, что на оси z получается рядъ темныхъ и свѣтлыхъ точекъ, причемъ сила свѣта послѣднихъ въ четыре раза больше той, которая получается въ этихъ геометрическихъ мѣстахъ безъ ширмы. Если вмѣсто круглаго отверстія въ ширмѣ возьмемъ тѣл ный кружокъ, то въ конусѣ его тѣни будетъ находиться свѣтлая линія, совпадающая съ осью z. Этотъ повидимому парадоксальный выводъ былъ подтвержденъ опытами Френеля и Араго.

Итакъ, представимъ себѣ ширму съ круглымъ отверстіемъ. Вообразимъ начало координатъ въ центрѣ отверстія и на оси z проведенной перпендикулярно къ плоскости этого отверстія,

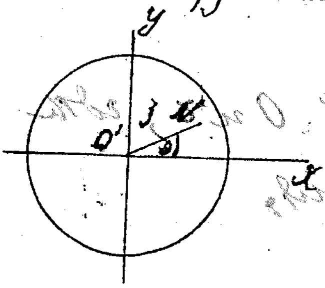


чер. 1

возьмемъ точки 1 и 0. Тогда $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а слѣдовательно

$$C = \iint \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{x^2+y^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) ds, \right.$$

$$S = \iint \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\ldots \ \text{id.} \right)$$



Пусть черт.(2) изображаетъ разсматриваемое круглое отверстіе.

Отнесемъ произвольную точку его N къ полярнымъ координатамъ съ началомъ въ O'. Тогда:

$$x^2+y^2=\xi^2,\quad ds=\xi\,d\theta\cdot d\xi,$$

а потому

$$C=\iint\cos\frac{\pi}{\lambda}\left(\xi^2\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\cdot\rho_0}\right)\xi\cdot d\theta\,\xi\,d\xi$$

$$S=\iint\sin\frac{\pi}{\lambda}\left(\ldots\quad id.\ldots\right)$$

Предѣлы для θ будутъ 0 и 2π. Интегрируя по θ, получимъ

$$C=2\pi\int\cos\left(\frac{\pi\xi^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\cdot\rho_0}\right)\xi\cdot d\xi,$$ такъ

какъ множитель при $d\theta$ не зависитъ отъ θ.

$$S=2\pi\int\sin\left(\frac{\pi\xi^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\,\rho_0}\right)\xi\,d\xi$$

Внесемъ 2π подъ знаки интеграловъ, подъинтегральныя выраженія умножимъ, а самые интегралы раздѣлимъ на $\left(\frac{\rho_1+\rho_0}{\lambda\,\rho_1\cdot\rho_0}\right)$ и проинтегрируемъ по ξ въ предѣлахъ 0 и r, гдѣ r есть радіусъ отверстія, Будемъ имѣть:

$$C = \frac{\lambda \cdot \rho_1 \rho_0}{\rho_1+\rho_0}\int_0^{\tau} \cos\left(\frac{\pi\xi^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right) d\left(\frac{\pi\xi^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right) =$$

$$= \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\sin\left(\frac{\pi\tau^2}{\lambda} * \frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right),$$

$$S = \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\int_0^{\tau} \sin\left(\frac{\pi\xi^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right) d\left(\frac{\pi\xi^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right) =$$

$$= \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\left[1-\cos\left(\frac{\pi\tau^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right)\right].$$

Поэтому

$$I = k(C^2+S^2) = k\left(\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\right)^2\cdot 2\left[1-\cos\left(\frac{\pi\tau^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right)\right] =$$

$$= 4k\left(\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_0+\rho_1}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{\tau^2}{2}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right).$$

Отсюда опредѣлимъ максимумъ и минимумъ I. Изъ формулы (1) §68 имѣемъ:

разность хода лучей $\delta = (r_0+r_1) - (\rho_1+\rho_0) = \tau^2/2 \cdot \frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}$.

Для точки M (черт. I), лежащей на границѣ отверстія съ ширмой на

Лит. Общ. распр. пол. книгъ.

разстояніи r (радіуса) отъ начала O;
$\delta = a+b$

Слѣдовательно

$$J = 4k\cancel{\lambda}\left(\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\right)^2\cdot\sin^2\pi\frac{a+b}{\lambda}.$$

Минимумъ освѣщенія, именно $J=0$ будетъ при $\frac{a+b}{\lambda}=n$, гдѣ n есть цѣлое число, или при $a+b=n\lambda$, то есть на оси Z будетъ темнота въ тѣхъ мѣстахъ, для которыхъ разность хода центральнаго и крайняго луча равна четному числу полуволнъ. Если же $\frac{a+b}{\lambda}=\frac{2n+1}{2}$ или $a+b=2(n+1)\frac{\lambda}{2}$, то есть разность хода равна нечетному числу полуволнъ, то для соотвѣтствующихъ точекъ оси Z получимъ максимумъ освѣщенія:

$$J = 4k\left(\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\right)^2.$$

Такимъ образомъ на оси Z получимъ рядъ свѣтлыхъ и темныхъ точекъ въ случаѣ однороднаго свѣта, и окрашенныхъ, въ случаѣ бѣлаго свѣта. Фіолетовая точка будетъ ближе къ отверстію, за ней — синяя, и т. д., пустой промежутокъ (инфракрасные лучи)., снова красные.... и т. д.

Сравнимъ это освѣщеніе точекъ оси Z съ освѣщеніемъ въ томъ случаѣ, когда нѣтъ ширмы или, другими словами, дано плоское отверстіе безконечно-большихъ размѣровъ, точки же 1 и 0 занимаютъ прежнее положеніе на оси Z. Имѣемъ:

$$C = \iint \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x^2+y^2}{2} \cdot \frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right) dx\,dy,$$

$$s = \iint \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x^2+y^2}{\lambda} \cdot \frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right) dx\,dy.$$

Введемъ вмѣсто x и y новыя перемѣнныя $\underline{u}$ и $\underline{v}$, опредѣляемыя уравненіями

$$\underline{u} = x\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_0 + 1/\rho_1\right)},$$

$$\underline{v} = y\sqrt{2/\lambda\left(1/\rho_0 + 1/\rho_1\right)}.$$

Тогда $du = dx\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_1 + 1/\rho_0\right)}$,

$dv = dy\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_0 + 1/\rho_1\right)}$, $dx\,dy = \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{2(\rho_1+\rho_0)} \times$
$\times\, du\,dv$, и мы найдемъ:

$$C = \frac{A(\rho_1\rho_0)}{2(\rho_1+\rho_0)}\iint\cos\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

$$s = \quad id. \quad \ldots \iint\sin \quad \ldots \quad id.$$

Такъ какъ предѣлы для u и v также, что и для x и y, то есть $-\infty$ и $+\infty$, и при томъ u и v также, какъ x и y не зависятъ другъ отъ друга, то мы будемъ имѣть:

$$C = \frac{A\rho_1\rho_0}{2(\rho_0+\rho_1)}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)du\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)dv\Big],$$

$$s = \frac{A\rho_1\rho_0}{2(\rho_1+\rho_0)}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\pi/_2 v^2)dv +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\pi/_2 u^2)du\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\pi/_2 v^2)\,dv\Big]$$

откуда, принимая во вниманіе равенство (см. ниже):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{\pi u^2}{2}du = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{\pi u^2}{2}du = 1,$$

получимъ:

$$c = 0, \quad s = \frac{A\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}$$

Слѣдоват.

$$I = k(c^2+s^2) = k\left(\frac{A\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\right)^2,$$

т. е. освѣщеніе точекъ оси z неозраниченной плоской волной будетъ въ четыре раза меньше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, когда было дано круглое отверстіе въ ширмѣ. —

Займемся теперь доказательствомъ второго вывода Пуассона. Представимъ себѣ въ безпредѣльномъ отверстіи темную круглую ширмочку діаметра, равнаго діаметру отверстія предыдущаго случая; ось Z, на которой по прежнему находится точка 1, пусть будетъ перпендикулярно къ ширмочкѣ въ ея центрѣ. Въ этомъ случаѣ:

$$C = C_\infty - C_0, \quad S = S_\infty - S_0.$$

гдѣ C_∞ и S_∞ суть интегралы по безконечно большому отверстію, а C_0 и S_0 интегралы по поверхности кружка (прежняго отверстія). Мы видимъ, что

$$C_\infty = 0, \quad S_\infty = \frac{A\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0},$$

$$C_0 = \frac{A\rho_0\rho_1}{\rho_1+\rho_0} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} r^2 \cdot \frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right),$$

$$s_0 = \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\left[1-\cos\left(\frac{\pi r^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right)\right];$$

$$c = \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right),$$

$$s = \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\cos\left(\frac{\pi r^2}{\lambda}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{\rho_1\rho_0}\right);$$

слѣдовательно

$$J = k\left(\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{\rho_0+\rho_1}\right)^2,$$

для любой точки Z, лежащей въ конусѣ тѣни, а такъ какъ J не заключаетъ періодическихъ членовъ, то освѣщеніе всей оси въ конусѣ будетъ равномѣрно, притомъ такое же точно, какъ и въ случаѣ безпредѣльной плоской волны.

Араго бралъ для своихъ опытовъ ширмочку въ 2^{mm} въ діаметрѣ и получилъ все явленіе, предсказанное теоріей; такимъ образомъ онъ подтвердилъ выводъ Пуассона опытнымъ путемъ. —

Выводъ интеграловъ Пуассона.

Разсмотримъ выраженіе вида:

$e^{\frac{i\pi v^2}{2}}$. Извѣстно, что оно представляется такъ:

$$e^{\frac{i\pi v^2}{2}} = \cos\frac{\pi v^2}{2} + i\sin\frac{\pi v^2}{2}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на dv и взявши $\int_0^\infty$, мы получимъ:

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi v^2}{2}}dv = \int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}dv + i\int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}dv \;\dots\dots (a)$$

Изъ анализа мы знаемъ, что

$$\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \dots \quad (b)$$

Пусть $z^2 = -\frac{i\pi v^2}{2} \dots (c)$

Дифференцируемъ обѣ части:

$$z\,dz = -\frac{i\pi v}{2}dv.$$

Изъ выраженія (c) находимъ:

$$\frac{v}{z} = \sqrt{-\frac{2}{i\pi}}.$$

Слѣдов.:

$$dz = -\frac{i\pi}{2}\sqrt{-\frac{2}{i\pi}}\,dv = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{-\frac{2}{i}}\,dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\sqrt{-\frac{2}{i}}\,dv.$$

Окончательно находимъ, что

$$dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{2}{i}}.dv.$$

Вставляемъ въ (b) это значеніе dz и значеніе z^2 изъ (c), тогда:

$$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi v^2}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{2}{i}}\,dv=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Или $$\int_0^\infty e^{\frac{i\pi v^2}{2}}dv=\sqrt{\frac{i}{2}}=\frac{\sqrt{2i}}{2}$$

Внося это значеніе интеграла въ (a), получаемъ:

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}dv+i\int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}dv=\frac{\sqrt{2i}}{2}$$

Легко сообразить, что

$$\sqrt{2i}=1+i.$$

Поэтому можемъ написать:

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}dv+i\int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}dv=\frac{i+1}{2}\ldots(d).$$

Приравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, находимъ, что

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}dv=\int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}dv=\frac{1}{2}$$

Замѣнимъ въ $\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}dv$ v черезъ $(-v)$, тогда получимъ

$$-\int_0^{-\infty}\cos\frac{\pi v^2}{2}dv=\frac{1}{2}.$$

Перемѣняя предѣлы напишемъ:

$$\int_{-\infty}^0\cos\frac{\pi v^2}{2}dv=\frac{1}{2}.$$

Точно также найдемъ:

$$\int_{-\infty}^0\sin\frac{\pi v^2}{2}dv=\frac{1}{2}.$$

Слѣд. можно написать

$$\int_{-\infty}^0\cos\frac{\pi v^2}{2}dv+\int_0^{+\infty}\cos\frac{\pi v^2}{2}dv=1,\ \text{или}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{\pi v^2}{2}dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{\pi v^2}{2}dv=1$$

Разсмотримъ еще случай прямоугольнаго отверстія. Преобразуемъ аргументъ интеграловъ C и S въ общемъ видѣ:

$$C=\iint\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)-x\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}\right)-\right.$$

$$\left.-y\left(\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right)\right]dxdy,$$

$$S=\iint\sin\;.\;.\;.\;.\;\;;\text{д}\;.\;.\;.\;,$$

вынеся подъ скобки [..] множитель 2, стоящій при π, и прибавивъ постоянный членъ $\left(\frac{\left(\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}\right)^{\cancel{2}\,2}}{\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}}\right)+\left(\frac{\frac{x'}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_1}+1/\rho_0}\right)^2$, что какъ извѣстно, мы въ правѣ дѣлать при вычисленіи J.

Тогда аргументъ представится выраженіемъ:

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)\left\{\begin{matrix}x^2-2x\dfrac{\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}}+\left(\dfrac{\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_1}+1/\rho_0}\right)^2+\\ +y^2-2y\dfrac{\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_1}+1/\rho_0}+\left(\dfrac{\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}}{1/\rho_1+1/\rho_0}\right)^2\end{matrix}\right\}$$

Введемъ новыя перемѣнныя <u>u</u> и <u>v</u>, связанныя съ <u>x и y</u> соотношеніями:

$$u=\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_1+1/\rho_0\right)}\left\{x-\frac{\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}}{1/\rho_1+1/\rho_0}\right\}\;.\;.\;.\;.\;A.$$

$$v=\sqrt{2/\lambda\left(1/\rho_1+1/\rho_0\right)}\left\{y-\frac{\frac{y_1}{\rho_1}+\frac{y_0}{\rho_0}}{1/\rho_0+1/\rho_1}\right\} \quad \dots\dots \quad (B.)$$

тогда:

$$dxdy=\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{2(\rho_1+\rho_0)}\,du\,dv,$$

а слѣдов.:

$$C=\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{2(\rho_1+\rho_0)}\iint\cos\pi/2\left(u^2+v^2\right)du\,dv$$

$$S=\dots\dots\iint\sin\dots\quad\dots\quad\dots$$

Интегралы эти даны Френелемъ и извѣстны подъ его именемъ. Такъ какъ въ случаѣ прямоугольнаго отверстія переменныя x, y, а слѣдовательно и u, v не зависятъ другъ отъ друга на контурѣ отверстія, то мы можемъ написать

$$C=\frac{\lambda\rho_1\rho_0}{2(\rho_0+\rho_1)}\left[\int\cos\frac{\pi}{2}u^2du\int\cos\frac{\pi}{2}v^2dv-\right. \quad (C)$$

$$\left.-\int\sin\frac{\pi}{2}u^2du\int\sin\frac{\pi}{2}v^2dv\right],$$

$$S=\dots id.\left[\int\sin\dots id.\,..\int\cos.\dots id\right] \quad (D)$$

Френель далъ способъ приблизительнаго вычисленія его интеграловъ:

$\int\cos\frac{\pi}{2}u^2du$ и $\int\sin\frac{\pi}{2}u^2du$. Пусть $u=i+\xi$. гдѣ ξ величина весьма малая, а i - какая угодно-произвольная. Тогда

$$\int_i^{i+\xi}\cos\frac{\pi}{2}u^2du=\int_0^{\xi}\cos\frac{\pi}{2}(i^2+2i\xi+\xi^2)d\xi$$ - приблизительно $$=\int_0^{\xi}\cos\frac{\pi}{2}(i^2+2i\xi)d\xi.$$

Умножая и дѣля на πi, получимъ:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{\xi}\cos\frac{\pi}{2}(i^2+2i\xi)d\left(\xi\pi i+\frac{\pi i^2}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\xi}\sin\frac{\pi}{2}(i^2+2i\xi)=\frac{1}{\pi i}\left[\sin\frac{\pi i}{2}(i+2\xi)-\sin\frac{\pi}{2}i^2\right]$$

Френель бралъ $\xi=0{,}1$; i послѣдовательно равнялось 0; 0,1; 0,2; 0,3; etcet.

Подставляя эти величины найдемъ:

$$\int_0^{0,1},\ \int_{0,1}^{0,2},\ \int_{0,2}^{0,3}\ \dots$$

а суммируя первые два интеграла, затѣмъ первые три и т. д., получимъ послѣдовательно:

$$\int_0^{0,2},\ \int_0^{0,3}\ \dots$$

Подобнымъ же образомъ вычисляется

$\int\sin\frac{\pi}{2}v^2dv$, именно

$$\int_i^{i\xi}\sin\frac{\pi}{2}u^2du=\frac{1}{\pi i}\left[-\cos\frac{\pi}{2}(i^2+2i\xi)+\cos\frac{\pi}{2}i^2\right].$$

Такимъ образомъ Френель составилъ слѣдующую таблицу:

Пред. инт. $A=\int du\cos\frac{\pi}{2}u^2$ $B=\int du\sin\frac{\pi}{2}u^2$

отъ $u=0$ до $u=$ 0,1 – „ – „ – 0,0999 — 0,0006
— 0,2 – „ – „ – 0,1999 – 0,0042
— 0,3 – „ – „ – 0,2993 — 0,0140
— 0,4 – „ – „ – 0,3574 — 0,0332
— 0,5 – „ – „ – 0,4923 – 0,0644
— 0,6 – „ – „ – 0,5811 – 0,1101
— 0,7 – „ – „ – 0,6587 — 0,1716.
— 0,8 – „ – „ – 0,7330 — 0,2487.
— 0,9 – „ – „ – 0,7651 — 0,3391.
— 1,0 – „ – „ – 0,7803 м — 0,4376.
— 1,4 – „ – „ 0,5439 – 0,7132 м
— 1,7 – „ – „ 0,3245 m — 0,5492.
4,0 – „ – 0,4986 — 0,4202 m.
— 2,0 – „ – 0,4886 – 0,3432 m.
— 2,2 „ – 0,6367 м – 0,4553.
— 2,4 – „ – „ 0,5556 – 0,6194 м.
— 2,6 – „ – „ 0,3895 m – 0,5499.
— 2,8 „ – „ 0,4678 — 0,3913 m.
— 3,0 „ – „ 0,6061 м. — 0,4959.
— 3,2 – „ – 0,4668 — 0,5931 м.
— 3,3 – „ – 0,4061 m. – 0,5791
— 3,5 „ – „ 0,5328 — 0,4919
— 3,6 – „ 0,4485 — 0,5754 м.

Мы указали способъ Френеля для приблизительнаго вычисленія его интеграловъ:

$$\int_0^u \sin\frac{\pi}{2}u^2\,du \quad и \quad \int_0^u \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du.$$

Для нашихъ цѣлей этого вычисленія не потребуется, такъ какъ намъ нужно разсмотрѣть maximum'a и minimum'a этихъ интеграловъ, условія которыхъ получимъ очень просто, не прибѣгая къ вычисленію ихъ — простымъ дифференцированіемъ, что̀ упустилъ изъ виду какимъ-то образомъ самъ Френель.

Пусть

$$A=\int_0^u \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du$$

Первая производная отъ A, приравненная нулю, есть:

$$\cos\frac{\pi u^2}{2}=0\ \dots\ (\alpha)$$

Это есть условіе максимума и miнимума; положительное значеніе 2й производной, т. е. производной отъ $\cos\frac{\pi u^2}{2}$, т. е.

$$-\sin\frac{\pi u^2}{2} \qquad \beta$$

указываетъ, какіе изъ корней (α) соотвѣтствуютъ minimum'y, а для maximum'a: $\sin\frac{\pi u^2}{2}=-\ \dots\ (\gamma)$.

Сопоставляя условія (α) и (β), будемъ имѣть, что для maximum'a должно

$$\frac{\pi u^2}{2} = \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ 9\frac{\pi}{2}, \dots (4n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Изъ условій (α) и (γ) находимъ, что для minimum'a необходимо:

$$\frac{\pi u^2}{2} = 3\frac{\pi}{2},\ 7\frac{\pi}{2},\ 11\frac{\pi}{2} \dots (4k+1)\pi/2.$$

Точно также разберемъ и

$$B = \int_0^u \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du$$

Первая производная должна равняться 0, т. е.

$$\sin\frac{\pi u^2}{2} = 0 \dots \quad (\alpha').$$

Вторая производная отъ B есть

$$\cos\frac{\pi u^2}{2}.$$

Она должна = (−) для max'-a, и (+) для min'-a.

Отсюда заключаемъ, что для maximum'a необходимо

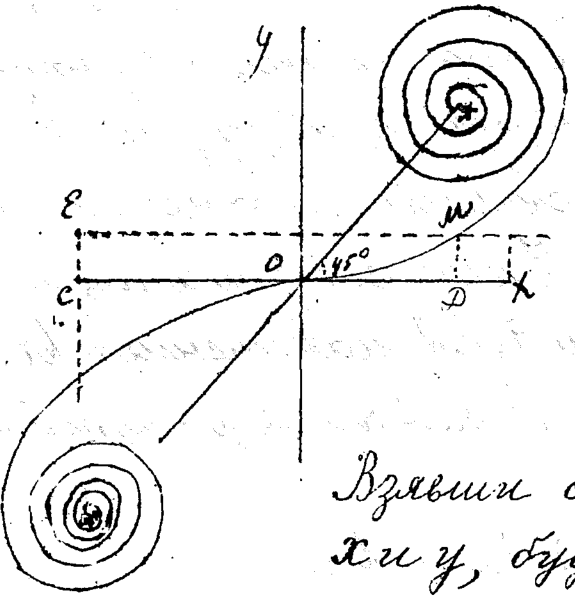
$$\frac{\pi u^2}{2} = \dots \pi,\ 3\pi,\ 5\pi \dots (2k+1)\pi,$$

для min-a $\frac{\pi u^2}{2} = \dots 2\pi, 4\pi \dots 2k\pi$.

Графическій способъ Корню ~~Пуанкаре~~.

Пуанкаре далъ очень изящное геометрическое построеніе интеграловъ Френеля; онъ разсматриваетъ эти интегралы, какъ координаты нѣкоторой точки (x, y).

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_0^u \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du \\ y &= \int_0^u \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du \end{aligned}\right\} \dots (k)$$



Взявши оси координатъ x и y, будемъ наносить на нихъ значенія x и y, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ u:

1) при $u=0$ и $x=y=0$, то есть наша кривая и проходитъ черезъ начало координатъ O.

2) Для двухъ значеній u . . . и $(-u)$, получаемъ значенія x, y, отличающіяся только знакомъ; поэтому

точки кривой, соотвѣтствующія этимъ значеніямъ, лежатъ въ первой и третьей четвертяхъ, симметрично относительно точки 0, которая такимъ образомъ является центромъ нашей кривой.

3) При $u=\pm\infty$, имѣемъ $x=y=\frac{1}{2}$, то есть, точки, соотвѣтствующія этимъ значеніямъ u, будутъ ассимптотическими точками нашей кривой. Легко сообразить, что онѣ лежатъ на прямой AA', наклоненной къ оси x подъ $\angle 45^\circ$, на одинаковомъ разстояніи отъ точки 0.

Найдемъ изъ (k) dx и dy.

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du \\ dy &= \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du \end{aligned}\right\}$$

Слѣд:

$$dx^2+dy^2=ds^2=du^2;\quad ds=du.$$

Или

$$s=u,$$

то есть параметръ нашихъ интеграловъ, -u, - представляетъ длину дуги кривой, отсчитываемую отъ 0 въ ту и другую сторону.

Составимъ

$$\frac{dy}{dx} = tg(T,X)$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\frac{\pi u^2}{2}.$$

Слѣдовательно въ точкѣ O касательная T совпадаетъ съ осью X, ибо при $u=0$, имѣемъ

$$tg(T,X)=0.$$

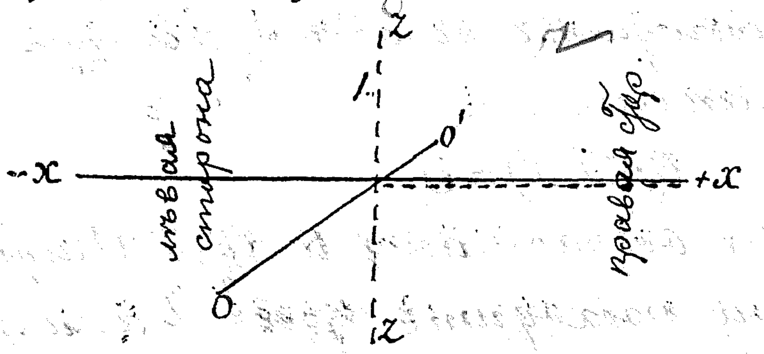
По мѣрѣ возрастанія u $tg(T,X)$ многократно проходитъ черезъ значенія $(+\infty)$ и $(-\infty)$; изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что наша кривая должна представляться въ видѣ двухъ спиралей, расположенныхъ въ первой и третьей четверти и имѣющихъ точки A и A_1 асимптотами.

Разсмотрѣніе этихъ двухъ спиралей даетъ возможность изучить нѣкоторые случаи диффракціи Френеля.

Пусть прямоугольное отверстіе имѣетъ одинъ край, совпадающій съ

Лит. адм. распр. изд. Ганина:

съ осью y, другія же его стороны безконечно удалены (случай прямолинейнаго края). Предположимъ, что плоскость чертежа перпендикулярна къ ширмѣ и пересѣкаетъ ее по оси x.



Начало O' координатъ возьмемъ на границѣ экрана съ отверстіемъ, а свѣтящуюся точку 1 на оси z ($x_1=0$, $y_1=0$).

Точка O можетъ лежать или по правую сторону оси z (въ освѣщенномъ пространствѣ), или по лѣвую (въ тѣни). Въ первомъ случаѣ:

Предѣлы для y будутъ: $-\infty$ и $+\infty$.

— v — $-\infty$ и $+\infty$ (изъ B).

— x — 0 и $+\infty$

— u — $-u=-\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}\frac{\frac{x_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}}$ и $+\infty$

и мы будемъ имѣть (изъ C) слѣдующее, принимая во вниманіе, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{\pi u^2}{2}du=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{\pi u^2}{2}du=1,$$

$$C = \mu\left[\int_{-u}^{+\infty}\cos\frac{\pi}{2}u^2du - \int_{-u}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{2}u^2du\right],$$

а (изъ D):

$$S = \mu\left[\int_{-u}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{2}u^2du + \int_{-u}^{+\infty}\cos\frac{\pi}{2}u^2du\right],$$

гдѣ $\mu = \frac{\lambda\rho_1\rho_0}{2(\rho_1+\rho_0)}$, а слѣдов.:

$$J = 2k\mu^2\left\{\left[\int_{-u}^{+\infty}\cos\frac{\pi u^2}{2}du\right]^2+\left[\int_{-u}^{+\infty}\sin\frac{\pi u^2}{2}du\right]^2\right\}.$$

Но $\int_{-u}^{+\infty}\cos\frac{\pi u^2}{2}du = \int_{-u}^{0}\cos\frac{\pi u^2}{2}du + \int_{0}^{+\infty}\cos\frac{\pi u^2}{2}du =$

$$= \int_{0}^{u}\cos\frac{\pi u^2}{2}du + \frac{1}{2},$$

$$\int_{-u}^{+\infty}\sin\frac{\pi u^2}{2}du = \int_{0}^{u}\sin\frac{\pi u^2}{2}du + \frac{1}{2}$$

поэтому

$$J = 2k\mu^2\left\{\left[\frac{1}{2}+\int_{0}^{u}\cos\frac{\pi u^2}{2}du\right]^2+\left[\frac{1}{2}+\int_{0}^{u}\sin\frac{\pi u^2}{2}du\right]^2\right\}.$$

Наше u есть длина дуги странной кривой (данной Пуанкарэ), отсчитываемой отъ 0 вправо и влѣво; этой дугѣ соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка M на кривой съ координатами x, и y, равными соотвѣтственнымъ значеніямъ инте—

гралов Френеля.

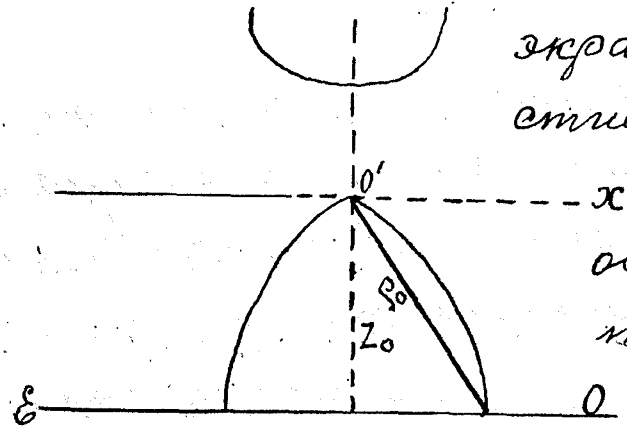
Такимъ образомъ $J=2k\zeta u^2\left[\left(\frac{1}{2}+x_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}+y_1\right)^2\right]$. $\frac{1}{2}$ будетъ абсцисса и ордината ассимптотическихъ точекъ A и A_1, поэтому $\frac{1}{2}+x_1=$ $=CD=EM$ и $\frac{1}{2}+y_1=A'E$.

$J=2k\zeta u^2(EM^2+A'E^2)=2k\zeta u^2A'M^2$, то есть сила свѣта пропорціональна квадрату разстоянія M отъ A'.

Передвигая M по кривой, то есть, увеличивая u, увидимъ, что $A'M$ будетъ то увеличиваться, то уменьшаться, то есть, проходить чрезъ maximum и minimum, а слѣдовательно, и напряженіе свѣта будетъ имѣть свои maximum'ы и minimum'ы. Величина этихъ max-овъ будетъ постепенно все уменьшаться, а min-овъ — увеличиваться, и въ концѣ концовъ освѣщеніе сдѣлается равномѣрнымъ.

Болѣе точное представленіе о расположеніи maximum'овъ и minimum'овъ внѣ геометрической тѣни мы можемъ составить слѣдующимъ образомъ:

пусть наша точка O находится на экранѣ E; допустимъ что въ O — minimum освѣщенія (или maximum).



Если будемъ измѣнять положеніе экрана, на которомъ разсматривается явленіе, то одинъ и тотъ же минимумъ будетъ лежать на различныхъ разстояніяхъ отъ оси z. Разсматривая x_0 и ρ_0, какъ координаты опредѣленнаго минимума, мы увидимъ что эти послѣдніе будутъ лежать въ плоскости чертежа на нѣкоторыхъ кривыхъ, которыхъ видъ и опредѣлимъ.

Мы имѣемъ:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_0 + 1/\rho_1\right)}\;\frac{\frac{x_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\cdot\frac{\frac{x_0}{\rho_0}}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_1}}}.$$

Пусть $\rho_0 = z_0$ (экранъ лежитъ далеко отъ ширмы); тогда

$$u_1^2\left(\frac{1}{z_0}+\frac{1}{\rho_1}\right)z_0^2 = \frac{2x_0^2}{\lambda}, \quad \text{или}$$

$$u_1^2 z_0 + \frac{u^2 z_0^2}{\rho_0} = \frac{2x_0^2}{\lambda},$$

а это есть уравненіе гиперболы, ось которой проходитъ черезъ 1 и 0', ибо для z получаются одни и тѣ же два значенія при $x = \pm$, уравненіе это удовлетворяется при $z = 0$ и $x = 0$, а также при $z = -\rho_1$ и $x = 0$, слѣдовательно вершины гиперболы лежатъ въ точкахъ 1 и 0'.

Для точекъ, внѣ тѣни находящихся, $x_0 < 0$, слѣдовательно, нижній предѣлъ $u_1 > 0$, верхній же $u_1 = \infty$, и такимъ образомъ:

$$J = 2k\mu^2 \left\{ \left[\int_{+u_1}^{+\infty} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du \right]^2 + \left[\int_{+u_1}^{+\infty} \mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2} du \right]^2 \right\};$$

но $\int_{+u_1}^{+\infty} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du = \int_0^{\infty} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du - \int_0^{u_1} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du = \frac{1}{2} -$

$$- \int_0^{u_1} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du,$$

$$\int_{+u_1}^{\infty} \mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2} du = \frac{1}{2} - \int_0^{u_1} \mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2} du,$$

а потому

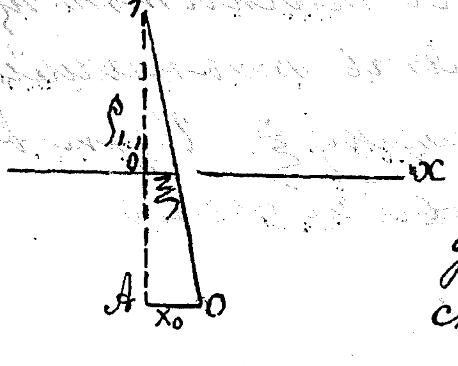
$$J = 2k\mu^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} - \int_0^{u_1} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \int_0^{u_1} \mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2} du \right]^2 \right\}$$

По прежнему $x_1 = \int_0^{u_1} \mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2} du$ и $y_1 = \int_0^{u_1} \mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2} du$

будутъ координатами соотвѣтственной точки спиральной кривой, а $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ — координатами верхняго полюса A.

Теперь $J = 2kq^2 AM^2$.
При перемѣщеніи точки M по кривой AM будетъ постепенно убывать безъ max. и min., то есть, сила свѣта внутри геометрической тѣни постепенно падаетъ до нуля.

Разсмотримъ еще случай безпредѣльной щели, ограниченной двумя параллельными краями. Начало координатовъ возьмемъ въ срединѣ отверстія (ширина котораго = 2a), а ось-Z — перпендикулярной къ плоскости ширмы.



Свѣтящаяся точка 1 лежитъ на оси Z. Предѣлы интеграловъ, входящихъ въ выраженіе J, будутъ таковы для $x = \pm a$

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_1 + 1/\rho_0\right)}\left\{-\frac{\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_0}{\rho_0}}{1/\rho_1+\frac{1}{\rho_0}}\right(.$$

Нижній предѣлъ

$$u' = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_1+1/\rho_0\right)}\left(a+\frac{\frac{x_0}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho_0}+1/\rho_1}\right)$$

Верхній предѣлъ

$$u'' = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/\rho_1+1/\rho_0\right)}\left(a-\frac{\frac{x_0}{\rho_0}}{1/\rho_1+1/\rho_0}\right)$$

Какой геометрическій смыслъ этихъ предѣловъ?

$$\frac{\frac{x_0}{\rho_0}}{1/\rho_1+1/\rho_0}=\frac{x_0\rho_1}{\rho_1+\rho_0}.$$

Разсмотримъ это выраженіе.

Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ на ось Z и соединимъ O съ свѣтлой точкой 1. Точка пересѣченія линіи O1 съ плоскостью щели будетъ отстоять отъ начала координатъ на величину ξ. Изъ подобныхъ треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{x_0}{\xi}=\frac{AO'+\rho_1}{\rho_1},$$

а такъ какъ AO' почти равно $OO'=\rho_0$, то

$$\frac{x_0}{\xi}=\frac{\rho_0+\rho_1}{\rho_1},$$ откуда

$$\xi=\frac{\rho_1 x_0}{\rho_1+\rho_0}.$$

Поэтому предѣлы наши будутъ таковы:

$$u' = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}\,(a+\xi) = -e(a+\xi) = -u_1;$$

$$u'' = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}\,(a-\xi) = e(a-\xi)$$

Пока ξ меньше a (O лежитъ въ непосредственно освѣщаемомъ пространствѣ), до тѣхъ поръ $u' = -$ и $u'' = +$

Если O лежитъ въ геометрической тѣни, то $\xi + a$ и оба предѣла будутъ отрицательными.

Въ первомъ случаѣ

$$J = 2ku^2\left\{\left(\int_{-u_1}^{u''} cs\frac{\pi u^2}{2}du\right)^2 + \left(\int_{-u_1}^{u''} sn\frac{\pi u^2}{2}du\right)^2\right\}$$

Легко видѣть, что

$$\int_{-u_1}^{u''} cs\frac{\pi u^2}{2}du = \int_{-u_1}^{0} cs\frac{\pi u^2}{2}du + \int_{0}^{u''} cs\frac{\pi u^2}{2}du =$$

$$= \int_{0}^{u_1} cs\frac{\pi u^2}{2}du + \int_{0}^{u''} cs\frac{\pi u^2}{2}du = x_1 + x.$$

Аналогично

$$\int_{-u_1}^{u''} sin\frac{\pi u^2}{2}du + \int_{0}^{u_1} sn\frac{\pi u^2}{2}du + \int_{0}^{u''} sn\frac{\pi u^2}{2}du =$$

$$= y_1 + y_2.$$

$$J = 2ku^2\left\{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2\right\}$$

Возьмемъ на нашей спирали (см. черт. на стр. 191) двѣ точки M_1 и M_2 въ разныхъ вѣтвяхъ кривой, абсолютныя значенія координатъ которыхъ суть x_1, y_1, x_2, y_2.

Тогда $J = 2kq^2 M_1M_2^2$. $u_1+u'' = c(a+\xi) + c(a-\xi) = 2ac = \mathrm{const}$.

Отсюда мы видимъ, что напряженіе свѣта въ точкѣ O пропорціонально квадрату разстоянія двухъ точек на спирали, перемѣщающихся так, что длина дуги кривой между ними остается постоянной. При этомъ перемѣщеніи длина прямой M_1M_2 будетъ проходить черезъ maximum и min.

Внутри конуса свѣта будутъ чередоваться свѣтлыя и темныя полосы.

Когда точка O лежитъ въ пространствѣ геометрической тѣни, то какъ уже знаем, $\xi > a$ и оба предѣла отрицательны.

$$u' = -c(a+\xi) = -u_1,$$

$$u'' = c(a-\xi) = -c(\xi-a) = -u_2.$$

$$J = 2kq^2\left\{\left(\int_{-u_1}^{-u_2}\mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2}du\right)^2+\left(\int_{-u_1}^{-u_2}\mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2}du\right)^2\right\}$$

$$\int_{-u_1}^{-u_2}\mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2}du=\int_{-u_1}^{0}\mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2}du+\int_0^{-u_2}\mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2}du=\int_0^{u_1}\mathrm{s}\frac{\pi u^2}{2}du-\int_0^{u_2}\mathrm{cs}\frac{\pi u^2}{2}du=$$

$$=x_1-x_2\,;\ \int_{-u_1}^{-u_2}\mathrm{sn}\frac{\pi u^2}{2}du = y_1-y_2\,.$$

$$u_1 - u_2 = c(a+\xi) + c(a-\xi) = 2ca = const.$$
$$I = 2k\mu^2(M_2M_1')^2$$

Точки M_2 и M_1' будутъ теперь лежать на одной вѣтви кривой, при чемъ будетъ оставаться постоянной дуга M_2M_1', прямая же M_2M_1' будетъ проходить чрезъ max. и min.

Получимъ опять систему свѣтлыхъ и темныхъ полосъ убывающей яркости.

Свѣтовыя явленія въ вѣсомыхъ тѣлахъ.

Исходныя уравненія, служившія намъ для всѣхъ выводовъ, были таковы:

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2} = (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta u \quad \text{и т. д.}$$

На основаніи этихъ уравненій мы нашли, что въ изотропной средѣ могутъ распространяться двоякаго рода колебанія: продольныя со скоростью $\Omega = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ (1) и поперечныя со скоростью $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ (2).

Скорость въ пустотѣ не зависитъ отъ періода колебаній. Но если бы также (колебація) самая формула мы вздумали примѣнить къ твердымъ прозрачнымъ тѣламъ, то встрѣтились бы съ противорѣчіемъ: въ нихъ, какъ показываетъ опытъ, скорость распространенія свѣта зависитъ и отъ періода колебанія. Поэтому цѣлый рядъ авторовъ вводитъ въ ученіе о колебаніяхъ въ твердыхъ тѣлахъ взаимное вліяніе между вѣсомыми частицами тѣла и невѣсомыми частицами эфира. Приведемъ наиболѣе простой взглядъ на этотъ вопросъ, принадлежащій Бусинеску.

Предположимъ, что среди эфира, находящагося въ покоѣ появилось бы однородное тѣло. Тогда на каждую частицу эфира, находящуюся внутри тѣла, молекулы послѣдняго оказали бы во всѣхъ направленіяхъ одинаковыя дѣйствія, равнодѣйствующая которыхъ была бы равна нулю. Только у поверхности эфиръ былъ бы сжатъ; но это поверхностное сжатіе не должно сильно вліять на упругость и плотность эфира внутри тѣла. Иначе эти свойства зависѣли бы отъ формы тѣла, а слѣдовательно, отъ послѣдней зависѣла бы и скорость свѣта, чего, однако, не оказывается.

Солнечными лучами мы можемъ вызывать расширеніе, плавленіе и испареніе тѣлъ. Слѣдовательно, колебанія эфира дѣйствуютъ на вѣсомыя частицы, заставляя и ихъ приходить въ колебательныя движенія. Не трудно доказать, что силы упругости, развивающіяся при этомъ между вѣсомыми частицами, ничтожны сравнительно съ силами упругости эфира.

Бусинескъ говоритъ, что волны эфира раскачиваютъ частицы тѣла, причемъ происходитъ нагрѣваніе, плавленіе его и т. д.

Сравнимъ между собой силы упругости, развивающіяся въ эфирѣ, съ силами упругости въ твердомъ вѣсомомъ тѣлѣ, предполагая, что послѣдній развился при перемѣщеніи вѣсомыхъ частицъ, вызваннымъ колебаніями эфира, проникающаго тѣло.

Пусть колебаніе u совершается параллельно оси x, а плоская волна перпендикулярна оси z.

Формула даетъ такую величину колебаній:

$$u = A\,\mathrm{cs}\,2\pi\left(\frac{t}{T} - z/\lambda\right).$$

Мы будемъ писать не точныя, а только приблизительныя формулы, имѣя въ виду указать только порядокъ величинъ. Тангенціальная сила $X_z = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)$. Если у насъ только колебаніе u, то $X_z = \mu \frac{du}{dz}$.

Дифференцируя выше написанное выраженіе для u, получимъ

$X_z = \frac{\mu_z 2\pi}{\lambda} u$, то есть величину порядка u, такъкакъ $A\,\mathrm{sn}\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$ одного съ нимъ порядка.

$\frac{du}{dt} = \frac{2\pi}{T} u$ — того же порядка.

Слѣдовательно, $\underline{U}$ такого же порядка, какъ и $T\frac{du}{dt}$.

Поэтому порядокъ силы упругости X_2 будетъ

$$\frac{\mu}{\lambda} T \frac{du}{dt}.$$

Если v скорость свѣта, то $\mu = \omega^2\rho = v^2\rho$ и порядокъ этотъ предыдущаго выраженія т. е. порядокъ силы упругости въ эфирѣ есть $\frac{v^2\rho T}{vT}\frac{du}{dt}$; но $\lambda = vT$, потому порядокъ будетъ $\frac{v^2\rho T}{vT}\frac{du}{dt}$ или $v\rho\frac{du}{dt}$.

Подобное же разсужденіе приведетъ къ заключенію, что порядокъ силъ упругости вѣсомыхъ частицъ тѣла будетъ

$\Omega\rho_1\frac{du}{dt}$, гдѣ Ω есть скорость звука, ибо для вѣсомыхъ тѣлъ $\sqrt{\mu/\rho}$ одного порядка съ

$$\Omega = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}.$$

Умножимъ и то и другое выраженіе на элементъ объема τ. $v\rho\frac{du}{dt}\tau$ и $\Omega\rho_1\frac{du}{dt}\tau$ есть количества движенія частицъ эфира и вѣсомаго тѣла, въ одномъ и томъ же объемѣ.

Эти количества движенія сравнимы другъ съ другомъ; потому что, по предположенію, одно изъ нихъ вызвано другимъ, можетъ быть, больше, чѣмъ другое, но никогда не будетъ меньше. Въ самомъ невыгодномъ случаѣ, когда

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho_1\frac{du_1}{dt},\quad \frac{\text{пор. упр. силъ эѳ.}}{\text{пор. упр. силъ в. тѣл.}}=\frac{v}{\Omega};$$

Такъ какъ v несравненно больше Ω, то заключаемъ отсюда, что имѣемъ право пренебречь упругими силами между частицами вѣсомаго тѣла сравнительно съ упругими силами эѳира.

Означимъ черезъ U, V, W перемѣщенія вѣсомой частицы по осямъ x, y, z; черезъ u, v, w слагающія перемѣщеній частицы эѳира, слагающія силъ упругости, дѣйствующихъ въ эѳирѣ, напримѣръ, по оси x, имѣющія видъ:

$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u$ (такъ какъ плотность и упругость эѳира въ вѣсомыхъ тѣлахъ та же, какъ если бы эѳиръ былъ свободенъ), будутъ тратиться на то, чтобы ускорить движеніе частицы эѳира и частицы вѣсомой. Слѣдовательно,

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u=\rho\frac{d^2u}{dt^2}+\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{d\theta}{dy}+2\mu\Delta_2 v=\rho\frac{d^2v}{dt^2}+\rho_1\frac{d^2v_1}{dt^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{d\theta}{dy}+2\mu\Delta_2 w=\rho\frac{d^2w}{dt^2}+\rho_1\frac{d^2w_1}{dt^2}.$$

Чтобы сдѣлать возможнымъ интеграцію дифференціальныхъ уравненій движенія, необходимо найти зависимость между перемѣщеніями u_1, v_1, w_1 вѣсомой частицы и перемѣщеніями частицъ эѳира. Такъкакъ послѣдніе весьма малы, то u_1, v_1, w_1 могутъ быть развернуты въ строки по перемѣщеніямъ u, v, w и ихъ производнымъ, при чемъ мы ограничимся производными не выше второго порядка. Остальными, по ихъ малости, пренебрежемъ. При этихъ условіяхъ выраженія u_1, v_1, w_1 представятся суммами произведеній нѣкоторыхъ постоянныхъ коэффиціентовъ, зависящихъ отъ физичес-

Литогр. Общ. распр. пол. книгъ.

кихъ свойствъ среды, на слѣдующія величины:

$$u, v, w; \quad \frac{d(u)}{d(x,y,z)}, \frac{d(v)}{d(x,y,z)}, \frac{d(w)}{d(x,y,z)}$$

$$\frac{d^2(u)}{d(xy, yz, zx)}, \frac{d^2(v)}{d(xy, yz, xz)}, \frac{d^2(w)}{d(xy, yz, zx)} \quad . \; . (A).$$

$$\frac{d^2(u)}{d(x^2, y^2, z^2)} \frac{d^2(v)}{d(x^2, y^2, z^2)} \frac{d^2(w)}{d(x^2, y^2, z^2)}$$

Чтобы упростить общія выраженія u, v, w), Буссинескъ разслѣдуетъ ихъ для частныхъ случаевъ строенія вѣсомой среды. Онъ вводитъ два термина.

Изотропнымъ тѣломъ называетъ такое тѣло, для котораго зависимость перемѣщеній вѣсомой частицы по направленію координатной оси остается безъ измѣненія, то есть съ тѣми же постоянными коэффиціентами и такого же вида, какъ бы мы не вращали около начала координатъ оси, оставляя безъ измѣненія ихъ относительныя направленія. (Для разъясненія см. такой же пріемъ при выводѣ потенціала упругихъ силъ).

Симметричнымъ называютъ тѣло, для котораго зависимость u_1, v_1, w_1 отъ u, v, w остается безъ измѣненія для опредѣленной системы координатъ, когда измѣняемъ направленіе одной изъ осей на противоположное. Тѣла, обыкновенно называющіяся изотропными, будемъ называть изотропно-симметричными.

Для изотропныхъ тѣлъ Буссинеск упрощаетъ соотношенія (A) для u_1, v_1, w_1 и приводитъ ихъ къ такому виду:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= Au + B\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + C\frac{d\theta}{dx} + D\Delta u \\ v_1 &= Av + B\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + C\frac{d\theta}{dy} + D\Delta v \\ w_1 &= Aw + B\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + C\frac{d\theta}{dz} + D\Delta w. \end{aligned}\right\} (B)$$

Для изотропно-симметричныхъ средъ $B=0$.

Этого допущенія совершенно достаточно, чтобы получить зависимость скорости распространенія свѣта въ твердыхъ тѣлахъ отъ періода колебаній.

Подставимъ въ основное выраженіе величину u, взятую изъ (13) при $B=0$. Форма уравненія останется прежняя, но коэффиціенты измѣнятся. Для этой подстановки намъ нужно взять отъ всѣхъ членовъ (A) вторыя производныя по времени.

$$u = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx+ny+pz}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{d^2u}{dx^2} \text{ и т. д.}$$

Мы, слѣдовательно, придемъ къ такому соотношенію:

$$\rho'\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\lambda+\mu\,\frac{C4\pi}{T^2}\right)\frac{d\theta}{dx} + \left(\mu+\frac{D4\pi}{T^2}\right)\Delta u.$$

Видъ уравненія сохранился, но въ коэффиціенты вошелъ періодъ колебанія. Скорость распространенія колебаній получится по тому же правилу, как и въ уравненіяхъ первоначальныхъ; слѣдовательно, по аналогіи, скорость распространенія поперечныхъ колебаній выразится так:

$$\omega^2 = \frac{\mu + D\frac{4\pi}{T^2}}{\rho_1},$$

то есть тоже будетъ зависѣть отъ періода колебаній.

Посмотримъ теперь, какъ полученные результаты применить къ объясненію различныхъ явленій. Въ нормальной дисперсіи скорость распространенія колебаній уменьшается съ уменьшеніемъ періода колебаній. Для этого случая придется взять $D<0$: съ уменьшеніемъ T дробь $4\pi/T^2$ будетъ возрастать, а ω — уменьшаться.

Полагая $D>0$, получимъ обратное случай перевернутаго спектра, представляемаго, напримѣръ, парами іода. Но явленіе аномальнаго спектра, при которомъ части спектра перемѣщены относительно другъ друга, напримѣръ, болѣе преломляемая часть спектра нормальнаго, оказывается менѣе преломляемой и наоборотъ, нашими гипотезами не объясняется

Для объясненія его надо ввести новые члены, которые выражали бы собой поглощеніе энергіи. Выраженіе (А) зависимости колебаній матеріальныхъ частицъ отъ колебаній эфира придется усложнить введеніемъ зависимости отъ скоростей частицъ эфира, т. е. отъ

$$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dt}.$$

Выраженіе $u = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ замѣнится въ этомъ случаѣ другимъ, въ которомъ Ae^{-kz}. По мѣрѣ увеличенія z Ae^{-kz} будетъ убывать, указывая на поглощеніе энергіи.

Вращательная поляризація.

Напишемъ наше основное ур-іе въ видѣ

$$\rho \frac{d^2u}{dt^2} = L\frac{d\theta}{dx} + K\Delta u.$$

Здѣсь L и K зависятъ отъ періода колебаній T. Мы раньше говорили, что на деформацію не имѣютъ вліянія вращенія разсматриваемаго объема около нѣкоторыхъ осей.

Теперь, когда рѣчь идетъ о вліяніи вѣсомыхъ частицъ на эфиръ, мы этими выраженіями пренебрегать не можемъ. Въ основныя уравненія приходится ввести еще новый членъ, зависящій отъ этихъ вращеній и входящій въ общія выраженія (B) для тѣлъ изотропныхъ.

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}=L\frac{d\theta}{dx}+K\Delta u+\frac{4\pi^2k}{T^2}\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)\quad(I.)$$

$$\rho\frac{d^2v}{dt^2}=L\frac{d\theta}{dy}+K\Delta v+\frac{4\pi^2k}{T^2}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right)\quad(II)$$

$$\rho\frac{d^2w}{dt^2}=L\frac{d\theta}{dz}+K\Delta w+\frac{4\pi^2k}{T^2}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)\quad(III)$$

Такого вида уравненія легко объясняютъ явленіе вращательной поляризаціи.

Предположимъ, что въ средѣ распространяется плоская волна, перпендикулярная оси z и несущая колебанія, параллельныя x и y. u и v дадимъ такую, болѣе общую, чѣмъ раньше, форму:

$$u=Me^{\frac{2\pi}{T}(t-z/\omega)\sqrt{-1}}\;\ldots\;(a)$$

$$v = Ne^{\frac{2\pi}{T}(t-z/\omega)\sqrt{-1}} \quad \dots \quad (b)$$

Это суть періодическія функціи, которыя могутъ быть выражены черезъ косинусы и синусы.

$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$. Но w отсутствуетъ, а колебанія u и v зависятъ только отъ z, поэтому кубическое расширеніе $\theta = 0$. Ур-іе (3), какъ видимъ, обращается въ 0, два же первыя можно упростить.

$$\Delta u = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dz^2},$$

$\Delta v = \frac{d^2v}{dz^2}$. Всѣ члены съ w пропадаютъ. Окончательный результатъ напишемъ такъ:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = L\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{4\pi^2}{T^2}k\frac{dv}{dz} \quad (1')$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = L\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}k\frac{du}{dz} \quad (2')$$

(Здѣсь L имѣетъ уже друг. значеніе...

Изъ (a) и (b) $\frac{d^2u}{dt^2} = -M\frac{4\pi^2}{T^2}e^{\frac{2\pi}{T}(t-z/\omega)\sqrt{-1}}$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -M\frac{4\pi^2}{T^2\omega^2}e^{\frac{2\pi}{T}(t-z/\omega)\sqrt{-1}};$$

$$\frac{dv}{dz} = -N\frac{2\pi}{T\omega}\sqrt{-1}\,e^{\frac{2\pi}{T}(t-z/\omega)\sqrt{-1}}.$$

Производимъ подстановку въ предыдущія ур-ія (1*) и (2*) и сокращаемъ на $\frac{4\pi^2}{T^2}e^{\frac{2\pi}{T}(t-{}^x/\omega)\sqrt{-1}}$

$$-M = -LM\frac{1}{\omega^2} - \frac{2\pi k}{T\omega}N\sqrt{-1}, \quad -N = -LN\frac{1}{\omega^2} + \frac{2\pi k}{T\omega}M\sqrt{-1}$$

Иначе $M({}^L/\omega^2 - 1) + \frac{2\pi k}{T\omega}N\sqrt{-1} = 0$ (c)

$$N\left(\frac{L}{\omega^2} - 1\right) - \frac{2\pi k}{T\omega}M\sqrt{-1} = 0 \quad (d).$$

Такимъ условіямъ должны удовлетворять выбранныя нами постоянныя, чтобы ур-ія (a) и (b) были интегралами разсматриваемыхъ основныхъ дифференціальныхъ ур-ій.

Умножаемъ (c) на N, (d) на M и вычитаемъ изъ перваго второе.

Они дадутъ:

$$K(M^2+N^2) = 0,$$

но k не 0, слѣдовательно,

$$N = \pm M\sqrt{-1} \ldots \quad (3)$$

Подставляя величину N въ одно изъ двухъ ур-ій (c) и (d), найдемъ:

$$\left(\frac{L}{\omega^2} - 1 \pm \frac{2\pi k}{T\omega}\right)M = 0 \quad (4).$$

Такъ какъ M не равно 0, ибо u и v мы принимаемъ существующи ми, то (4) даетъ:

$$\frac{L}{\omega^2} - 1 \mp \frac{2\pi k}{T\omega} = 0\,,\quad \omega^2 \pm \frac{2\pi k}{T}\omega - L = 0$$

откуда

$$\omega = \pm\frac{\pi k}{T} \pm \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{T^2} + L} \quad \ldots (5).$$

Радикалъ долженъ быть взятъ съ плюсомъ только, ибо въ противномъ случаѣ для ω получились бы значенія отрицательныя, что не имѣетъ физическаго смысла. Слѣдовательно для скорости волны получаемъ двѣ различныя величины:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi k}{T} + \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{T^2} + L} \\ \omega_2 &= -\frac{\pi k}{T} + \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{T^2} + L}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

Слѣдовательно, будутъ распространяться двѣ плоскія волны по одному и тому же направленію, съ двумя различными скоростями. Скорость ω, соотвѣтственно выраженію (3)

$$N = -\sqrt{T}\cdot M \quad \ldots (7).$$

Для каждой величины ω, ω_1 и ω_2

величины амплитудъ будутъ различны. Положимъ амплитуду колебанія, распространяющагося со скоростью ω_1, равною $M = Je^{2\pi\varphi/T\sqrt{-1}}$, $N = -Je^{\frac{2\pi\varphi}{T}\varphi_1\sqrt{-1}}$. Тогда изъ (α), (β), (γ) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= Je^{\frac{2\pi}{T}(t - z/\omega + \varphi_1)\sqrt{-1}} = \\ &= J\cos\frac{2\pi}{T}(\;\;) + \sqrt{-1}\,J\sin\frac{2\pi}{T}(\;\;) \\ v' &= -\sqrt{-1}\,Je^{\frac{2\pi}{T}(t - z/\omega + \varphi_1)\sqrt{-1}} = \\ &= -J\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi}{T}(\;\;) + \sin\frac{2\pi}{T}(\;\ldots) \end{aligned}\right\}(8).$$

Дѣйствительныя части этихъ ур-ій соотвѣтствуютъ другъ другу отдѣльно отъ мнимыхъ и, какъ мы замѣтили, удовлетворяютъ отдѣльно ур-ямъ движенія. Мы беремъ ихъ:

$$\begin{aligned} u' &= J\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\omega_1} + \varphi_1\right) \\ v' &= J\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\omega_1} + \varphi_1\right) \end{aligned} \quad \ldots\ldots (9)$$

Траекторія, описываемая частицей, получится чрезъ исключеніе времени t изъ (9).

Имѣемъ:

$$U'^2+V'^2=J^2 \ldots (10)$$

Это есть кругъ, описываемый противъ часовой стрѣлки, ибо съ возрастаніемъ t cs, а слѣдовательно и U, убываетъ, а V возрастаетъ. Это круговой лѣвый лучъ.

Для другого корня ω_2 полагаем

$$M = J e^{\frac{2\pi\psi_2}{\tau}}\sqrt{-1} \ldots (11)$$

Ему соотвѣтствуетъ въ выраженіи (3)

$$N = +M\sqrt{-1} \quad \ldots (12)$$

Выраженіе (12) отличается отъ (7) только знакомъ. Слѣдовательно, чтобы получить колебанія U'' и V'', распространяющіяся со скоростью ω_2, достаточно въ выраженіи (8) перемѣнить знакъ коэффиціентовъ въ колебаніи v. Тогда, отбирая снова только однѣ дѣйствительныя части и вводя ω_2 и ψ_2 вмѣсто ω_1 и ψ_1, найдемъ:

$$U'' = J\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - z/\omega_1 + \psi_2\right) \quad \ldots (13).$$
$$V'' = -J\sin 2\pi/T\left(t - z/\omega_2 + \psi_2\right)$$

Траекторія будетъ снова кругъ $u''^2+v''^2=$ $=J^2$, описываемый въ противную сторону, ибо v'' со временемъ возрастаетъ въ сторону отрицательныхъ $y^{овъ}$. Это круговой правый лучъ (стрѣлки 2). Итакъ, лѣвый и правый круговой лучъ распространяются съ различными скоростями. Чтобы найти равнодѣйствующую, нужно взять сумму (9) и (13). Имѣемъ, замѣняя суммы cos и разности sin по извѣстнымъ формуламъ:

$$\left.\begin{array}{l} u=u'+u''=2J\cos\frac{\pi}{T}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}z+\varphi_1-\varphi_2\right)\cos\frac{2\pi}{T}\times \\ \times\left(t-\frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\omega_2}z+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) \\ v=v'+v''=2J\sin\pi/T\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}z+\varphi_1-\varphi_2\right)\cos\frac{2\pi}{T}\times \\ \times\left(t-\frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\omega_2}z+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) \end{array}\right|(14)$$

Слѣдовательно, результирующее прямолинейное колебаніе имѣетъ амплитуду $2J$ и дѣлаетъ съ осью $x^{ов}$ уголъ ψ, tg. котораго $=v/u=tg\,\pi/T\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}z+\varphi_1-\varphi_2\right)$.

$$\psi = \frac{\pi}{T}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2} z + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$$

Этотъ уголъ зависитъ отъ z. По мѣрѣ движенія волны, возрастаетъ z и, слѣдовательно, при $\omega_1 > \omega_2$, увеличивается ψ, а съ нимъ поворачивается и прямолинейное колебаніе и слѣдовательно и плоскость поляризаціи поворачивается влѣво, въ сторону кругового лѣваго луча. Если $\omega_2 > \omega_1$, то ψ будетъ уменьшаться, а слѣдовательно, поворачиваніе совершается вправо, въ сторону кругого праваго. Слѣдовательно вращеніе совершается въ сторону того кругового луча, который распространяется быстрѣе.

Изъ (b) находимъ:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi K}{\tau} \quad \text{и} \quad \omega_1\omega_2 = a.$$

Слѣдовательно, величина ψ можетъ быть написана въ такомъ видѣ:

$$\psi = \frac{2\pi^2 K}{a T^2} z + \pi\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{T}\right).$$

Слѣдовательно, уголъ вращенія приблизительно обратно пропорціоналенъ T^2 (ибо по малости T 1-й членъ преобладаетъ надъ величиной 2-го) или обратно пропорц. квадрату длины волны. Для фіолетовыхъ лучей уголъ будетъ больше, чѣмъ для красныхъ. Этотъ законъ нашелъ путемъ опыта Біо.

Если имѣемъ среду, которая вращаетъ плоскость поляризацiи, то полагая $z=0$, получаемъ $\psi_0 = \frac{\pi}{T}(\varphi_1-\varphi_2)$, то есть уголъ, который дѣлаетъ съ осью x колебанiе при вхожденiи въ среду. При $z=e$, т. е. когда волна пройдетъ длину e,

$$\psi_e = \frac{2\pi^2 k}{\lambda T^2}e + \frac{\pi}{T}(\varphi_1-\varphi_2).$$

Лучъ повернулся на уголъ

$$\psi_e - \psi_0 = \frac{2\pi^2 k}{\lambda T^2}e,$$ но $\lambda = vT$, поэтому

$$\psi_e - \psi_0 = \frac{2\pi^2 k v^2}{\lambda^2}e = C\frac{e}{\lambda^2}.$$

Постоянная C называется удѣльнымъ вращенiемъ разсматриваемой среды.

Теорія двойного лучепреломленія.

Физическія свойства кристалловъ весьма мало измѣняются по различнымъ направленіямъ, такъ что мы можемъ утверждать съ малою ошибкою, что кристаллы почти изотропныя и почти симметричныя среды, по отношенію къ опредѣленнымъ осямъ. Нѣкоторые изъ кристалловъ строго симметричны, другіе же, дающіе круговую и эллиптическую поляризацію, имѣютъ внѣшнюю форму не симметричную. Симметрія этой формы нарушается весьма малыми площадками, не симметрично расположенными. Безъ сомнѣнія это нарушеніе внѣшней формы имѣетъ причины не въ строгой внутренней симметріи.

Разсматривая кристаллы, какъ среды почти изотропныя, мы должны будемъ въ уравненіяхъ движенія, написанныхъ для тѣлъ изотропныхъ, нѣсколько измѣнить коэффиціента и потомъ уже примѣнять эти ур-ія къ тѣламъ кристаллическимъ. Ур-ія движенія примутъ видъ:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = k(1+a)\frac{d\theta}{dx} + \mathcal{L}\underline{(1+a)}\Delta_2 u + \frac{4\pi^2 k}{\tau^2} \times$$

$$\times\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right).$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \mathcal{K}(1+b)\frac{d\theta}{dy} + \mathcal{L}(1+\underline{a})\Delta_2 v +$$

$$+\frac{4\pi^2 k}{T^2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \mathcal{K}(1+c)\frac{d\theta}{dz} + \mathcal{L}(1+\underline{c})\Delta_2 w +$$

$$+\frac{4\pi^2 k}{T^2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)$$

Здѣсь $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ и k суть тѣже величины постоянныя, какъ въ дифференціальныхъ ур-іяхъ движенія для изотронныхъ-симметричныхъ средъ. Нѣтъ надобности считать a и $\underline{a}$, b и $\underline{b}$ одинаковыми; ихъ можно считать и различными. Исключая изъ нашихъ изслѣдованій явленіе эллиптической поляризаціи, мы можемъ послѣдніе члены ур-ій зачеркнуть. Будемъ считать u, v и w проекціями нѣкотораго колебанія на оси x, y и z.

Направленіе этого колебанія дѣлаетъ нѣкоторый уголъ съ плоской волной. Пусть

m, n и p будутъ cos'ы угловъ нормали къ плоскости волны съ осями координатъ, а m', n' и p' - cos'ы угловъ колебанія съ осями координатъ. Пусть σ есть величина этого колебанія. Положимъ $\sigma = I\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega}\right)$ A.

$u = \sigma m', v = \sigma n', w = \sigma p'$ (A_1).

Надо отыскать условія, при которыхъ написанныя выраженія (A'), будутъ интегралами нашихъ основныхъ уравненій съ частными производными.

Замѣтимъ, что изъ (A') и (A)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\sigma m'.$$

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = +\frac{2\pi}{T\omega} I\sin\frac{2\pi}{T} \times$$

$$\times\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega}\right)\sum mm'.$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{4\pi^2}{T^2\omega^2} m\sigma\sum mm';$$

$$d^2u/dx^2 = m'\, m^2/\omega^2\; 4\pi^2/T^2\,\sigma,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -m'\frac{n^2}{\omega^2}\frac{4\pi^2}{T^2}\sigma,$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -m'\frac{p^2}{\omega^2}\frac{4\pi^2}{T^2}\sigma.$$

$$\Delta u = -m'\frac{4\pi^2}{\omega^2 T^2}\sigma,$$ такъ какъ

$$m^2+n^2+p^2=1.$$

Теперь производимъ подстановку въ основныя уравненія. $4\pi^2/T^2\sigma$ сокращаемъ. Изъ перваго имѣемъ:

$$-m' = -K(1+a)\frac{m}{\omega^2}\Sigma mm' - L(1+a)\frac{m'}{\omega^2}$$ или

$$-\omega^2 m' = -K(1+a)m\Sigma mm' - L(1+a)m'!$$

Переносимъ все въ лѣвую часть. Аналогично получимъ и два другія ур-ія.

$$\left.\begin{aligned} &[L(1+a)-\omega^2]m'+K(1+a)m\Sigma mm'=0.\\ &[L(1+b)-\omega^2]n'+K(1+b)n\Sigma mm'=0\\ &[L(1+c)-\omega^2]p'+K(1+c)p\Sigma mm'=0 \end{aligned}\right\}(2).$$

Множимъ эти уравненія соотвѣтственно на m, n, p и затѣмъ складываемъ:

$$[L-\omega^2+K(1+\Sigma am^2]\Sigma mm'+L\Sigma amm'=0\ldots(3)$$

a, b и c по условію весьма малыя величины. Послѣдній членъ поэтому дал-

$$\Sigma m^2 = 1. \qquad \Sigma \underline{mm'} = \text{мало}$$

женъ быть малъ.

$$\{Z-\omega^2+k(1+\Sigma a m^2)\}\Sigma m m' = \text{мал. велич.}$$

Послѣднее возможно въ двухъ случаяхъ или $\Sigma m m'$ - мала, или $\{Z-\omega^2+k(1+\Sigma m^2 a)\}$ мало. Разсмотримъ послѣднее. Такъкакъ $k\Sigma m^2 a$ мало, то слѣдовательно, $Z-\omega^2+k$ должно быть то же мало. Чтобы оцѣнить послѣдній результатъ, мы найдемъ прежде его приблизительное значеніе. Положимъ

$$Z-\omega^2+k=0.$$

Вставляя отсюда $Z-\omega^2=-k$ въ уравненіе (2), мы найдемъ изъ нихъ:

$$\frac{m'}{m} = -\frac{k(1+a)\Sigma m m'}{Za-K};$$

$$\frac{n'}{n} = -\frac{k(1+b)\Sigma m m'}{Zb-k},$$

$$\frac{p'}{p} = -\frac{k(1+c)\Sigma m m'}{Zc-k};$$

или опуская величины, почти малыя $\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}=\frac{p'}{p}=\Sigma m m'$.

Отсюда

$$\frac{m'^2}{m^2}=\frac{n'^2}{n^2}=\frac{p'^2}{p^2}=\left(\Sigma m m'\right)^2=\pm 1.$$

Слѣдовательно, колебанiе совершается по нормали къ волнѣ: оно продольное. Но этотъ выводъ, какъ мы видѣли, приблизительный; слѣдовательно условiе $L-\omega^2+K$ = весьма малой величинѣ, указываетъ на возможность почти продольныхъ или, как мы ихъ будемъ называть, мнимо-продольныхъ колебанiй (quasi longitudinales).

Мнимо-поперечныя колебанiя.

Разсмотримъ другой возможный случай, когда $\Sigma mm'$ весьма мало. Изъ ур-iй (2) имѣемъ приблизительно

$$\frac{m'}{\frac{m}{\omega^2-\alpha}} = \frac{n'}{\frac{n}{\omega^2-\beta}} = \frac{p'}{\frac{p}{\omega^2-\gamma}} = K\Sigma mm' \qquad (4)$$

гдѣ $\alpha = L(1+a)$, $\beta = L(1+b)$, $\gamma = L(1+c)$.

Изъ (4) имѣемъ, беря отношенiе суммы предыдущихъ къ суммѣ послѣдующихъ:

$$\frac{m'^2}{\left(\frac{m}{\omega^2-a}\right)^2} = \frac{n'^2}{\left(\frac{n}{\omega^2-\beta}\right)^2} = \frac{p'^2}{\left(\frac{p}{\omega^2-\gamma}\right)} = \frac{\Sigma m'^2}{\Sigma\left(\frac{m}{\omega^2-\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{m}{\omega^2-a}\right)^2},$$

ибо $\Sigma m'^2$, какъ сумма квадратовъ косинусовъ $=1$. Отсюда: можно получить связь между направленіемъ колебанія и несущей его плоской волны.

$$\left.\begin{aligned} m' &= \frac{m}{\omega^2-\alpha}\sqrt{\frac{1}{\Sigma\frac{m^2}{(\omega^2-\alpha)^2}}}; \\ n' &= \frac{n}{\omega^2-\beta}\frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{m^2}{\omega^2-\alpha}\right)^2}} \\ p' &= \frac{p}{\omega^2-\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{m^2}{(\omega^2-\gamma^2)}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad (5').$$

Вставляя эти выраженія въ уравненіе $\Sigma mm'=0$, получимъ уравненіе скоростей: $\frac{m^2}{\omega^2-\alpha}+\frac{n^2}{\omega^2-\beta}+\frac{p^2}{\omega^2-\gamma}=0$,

или символически

$$\Sigma\frac{m^2}{\omega^2-\alpha}=0 \quad \ldots (6).$$

Уравненіе даетъ связь между скоростью волны въ кристаллѣ и направленіемъ ⊥'а къ этой волнѣ.

Возвышая ур-іе (5') въ квадратъ, перенося по одному множителю $\omega^2-\alpha$, $\omega^2-\beta$, $\omega^2-\gamma$ изъ $(\omega^2-\alpha)^2$ и т. д. въ лѣвыя части и складывая, обращая вниманіе на (6), получимъ:

$$\Sigma(\omega^2-\alpha)m'^2 = \frac{\Sigma\frac{m'^2}{\omega^2-\alpha}}{\Sigma\frac{m'^2}{(\omega^2-\alpha)^2}} = 0.$$

обозначая знакомъ Σ сумму членовъ, обозначеннаго и двухъ, вкоторыхъ α и m надо замѣнять соотвѣтственно черезъ β и γ, и n, p. Или отсюда $\Sigma\omega^2m'^2 = \Sigma\alpha m'^2$, или $\omega^2 = \Sigma\alpha m'^2$ . . . (7).

Изъ начала координатъ по направленію колебаній отложимъ величину, обратную скорости, съ которою оно распространяется, то есть $\frac{1}{\omega}$; если x, y_1, z_1 координаты оконечности полученной такимъ образомъ линіи, то такъ какъ ея углы съ осями суть m', n', p', мы имѣемъ:

$$x_1 = \frac{1}{\omega}m';\ y' = \frac{1}{\omega}n';\ z_1 = \frac{1}{\omega}p';\ \text{или:}$$
$$m' = x_1\omega,\ n' = y_1\omega;\ p' = z_1\omega.$$

Подставивъ эти выраженія въ ур-іе (7), получимъ ур-іе поверхности, на которой лежатъ оконечности обратныхъ величинъ скоростей по направленію соотвѣтствующихъ колебаній:

$$\Sigma\alpha x_1^2 = 1,\ \text{или}\ \alpha x_1^2+\beta y_1^2+\gamma z_1^2 = 1 \ . . (8).$$

Это есть эллипсоидъ. Онъ называется эллипсоидомъ упругости. Онъ обладаетъ слѣдующими свойствами. Чтобы найти колебанія, соотвѣтствующія какой нибудь плоской волнѣ, нужно разсѣчь (какой нибудь) эллипсоидъ (8) плоскостью, параллельною волнѣ. Эта плоскость въ сѣченіи даетъ эллипсисъ. Колебанія, распространяемыя разсматриваемой плоской волной, будутъ совершаться параллельно осямъ этого эллипсиса разсѣченія, слѣдовательно перпендикулярны другъ другу, и распространяться съ двумя различными скоростями, равными обратнымъ величинамъ соотвѣтствующихъ полуосей. Слѣдовательно, въ одномъ и томъ же направленіи будутъ распространяться двѣ плоскія волны, перпендикулярно поляризованныя. Докажемъ это. Эллипсисъ разсѣченія опредѣляется ур-іями эллипсоида:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma a x'^2 = 1 \\ \text{и плоской волны} \\ \qquad \Sigma m x = 0\end{array}\right\} \quad (9).$$

Означимъ чрезъ dx, dy, dz проэкціи элемента (x', y', z') эллипсиса; направленіе его, или направленіе касательной къ нему, опредѣляется углами λ, μ, ν, образуемыми съ осями координатъ, при чемъ,

$$\cos\lambda = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

$$\cos\mu = \frac{dy}{\sqrt{\dots}}\ ;\ \operatorname{cs}\nu = \frac{dz}{\sqrt{\dots}}.$$

Диференцируя ур-ія (9) по x, имѣемъ:

$$dx\,\alpha x' + \beta y' dy + \gamma z' dz = 0.$$

$$m dx + n dy + p dz = 0.$$

По дѣленіи на $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$:

$$\alpha x' \operatorname{cs}\lambda + \beta y' \operatorname{cs}\mu + \gamma z' \operatorname{cs}\nu = 0 \qquad (a)$$

$$m \operatorname{cs}\lambda + n \operatorname{cs}\mu + p \operatorname{cs}\nu = 0 \quad \dots (b)$$

Пусть точка эллипсиса x', y', z' выбрана въ оконечности радіуса вектора, совпадающаго съ направленіемъ колебанія, возможнаго для данной плоской волны; тогда x', y', z' пропорціональны m', n', p', и уравненіе (a) можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$\alpha m'\mathrm{cs}\lambda+\beta n'\mathrm{cs}\mu+\gamma p'\mathrm{cs}\nu=0 \qquad (a')$$

Точно также въ ур-іи (в) мы можемъ замѣнить по ур. (5) величины m, n, p имъ пропорціональными:

$m'(\omega^2-\alpha)$, $n'(\omega^2-\beta)$ $p'(\omega^2-\gamma)$; тогда получаемъ:

$$m'(\omega^2-\alpha)\mathrm{cs}\lambda+n'(\omega^2-\beta)\mathrm{cs}\mu+p'(\omega^2-\gamma)\mathrm{cs}\nu=0 \qquad (в')$$

складывая (a') и (в'):

$$\omega^2 m'\mathrm{cs}\lambda+\omega^2 n'\mathrm{cs}\mu+\omega^2 p'\mathrm{cs}\nu=0,$$

то есть, что направленіе колебанія перпендикулярно къ касательной, проведенной къ нашему эллипсу въ оконечности радіуса вектора, по которому колебаніе совершается. Такимъ свойствомъ обладаютъ только оси эллипса, что и требовалось доказать.

Каждое изъ двухъ возможныхъ въ плоскости эллиптическаго сѣченія колебаній имѣетъ свою скорость. Пусть полуоси даннаго сѣченія будутъ а и в; тогда эти скорости будутъ: 1/а и 1/в. Но всякій трехъосный эллипсоидъ имѣетъ двѣ системы круговыхъ сѣченій, для которыхъ эти скорости будутъ равны; нормали къ этимъ круговымъ сѣченіямъ называются *осями волнъ*, или *главными оптическими осями*. Волны, плоскости которыхъ перпендикулярны къ главнымъ оптическимъ осямъ, не разщепляются; направленія колебаній въ нихъ могутъ быть какія угодно.

Поверхность волны.

Пусть въ нѣкоторый данный моментъ времени изъ начала координатъ выходятъ всевозможныя плоскія волны; по истеченіи единицы времени всѣ эти плоскости будутъ отстоять отъ начала координатъ на длины, равныя соотвѣтственнымъ скоростямъ ω. Въ каждомъ направленіи будутъ распространяться два перпендикулярно-поляризованныхъ колебанія со скоростями ω_1 и ω_2. По истеченіи единицы времени плоскости будутъ обвертывать нѣкоторую поверхность съ двумя полостями, такъ называемую поверхность волны. Ур-іе плоской волны будетъ:

$$mx+ny+pz=\omega \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Требуется найти поверхность, обвертываемую этими плоскостями, полагая, что m, n, p, ω удовлетворяютъ условіямъ

$$\left.\begin{array}{l} m^2+n^2+p^2=1 \\ \frac{m^2}{\omega^2-\alpha}+\frac{n^2}{\omega^2-\beta}+\frac{p^2}{\omega^2-\gamma}=0 \end{array}\right\} (11).$$

Чтобы опредѣлить обвертываемую плоскостями поверхность $F(x,y,z,k,l)=0$, гдѣ k и l — произвольные параметры, нужно исключить изъ ур-ій

$$F=0;\ \frac{dF}{dk}=0;\ \frac{dF}{dl}=0.$$

результатъ такого исключенія бу

детъ $f(x, y, z)=0$, что и составитъ уравненіе искомой поверхности. Въ данномъ случаѣ имѣемъ слѣдующую систему уравненій, принимая m и n за произвольные параметры

$$x+z\frac{dp}{dm}=\frac{d\omega}{dm};\quad y+z\frac{dp}{dn}=\frac{d\omega}{dn}\quad\ldots(12)$$

Чтобы ввести параметры въ конечномъ видѣ, изъ (11) находимъ:

$$m=-p\frac{dp}{dm};\quad n=-p\frac{dp}{dn}\quad\ldots(13).$$

Называя для краткости:

$$\frac{m^2}{(\omega^2-\alpha)^2}+\frac{n^2}{(\omega^2-\beta)^2}+\frac{p^2}{(\omega^2-\gamma)^2}=\mathcal{E}^2$$

находимъ изъ ур-ія скоростей:

$$\left.\begin{aligned}\frac{m}{\omega^2-\alpha}+\frac{p\frac{dp}{dm}}{\omega^2-\gamma}&=\mathcal{E}^2\omega\frac{d\omega}{dm}\\ \frac{n}{\omega^2-\beta}+\frac{p\frac{dp}{dn}}{\omega^2-\gamma}&=\mathcal{E}^2\omega\frac{d\omega}{dn}\end{aligned}\right\}(14)$$

Изъ (12), (13) и (14):

$$\left.\begin{aligned}x-z\frac{m}{p}&=\frac{m}{\mathcal{E}^2\omega}\left\{\frac{1}{\omega^2-\alpha}-\frac{1}{\omega^2-\gamma}\right\}\\ y-z\frac{n}{p}&=\frac{n}{\mathcal{E}^2\omega}\left\{\frac{1}{\omega^2-\beta}-\frac{1}{\omega^2-\gamma}\right\}\end{aligned}\right.\quad\ldots(15).$$

Мы удовлетворимъ этимъ выраженіялъ, полагая:

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{\xi^2\omega}\left\{\frac{1}{\omega^2-\alpha} + \xi\right\}$$

$$\frac{y}{n} = \frac{1}{\xi^2\omega}\left\{\frac{1}{\omega^2-\beta} + \xi\right\}$$

$$\frac{z}{p} = \frac{1}{\xi^2\omega}\left\{\frac{1}{\omega^2-\gamma} + \xi\right\}$$

Умножимъ для опредѣленія ξ эти ур-ія на m^2, n^2, p^2, сложимъ и обратимъ вниманіе на ур-ія (10) и (11), получимъ:

$$z = p\left\{\omega + \frac{1}{\xi^2\omega(\omega^2-\gamma)}\right\}$$

$$y = n\left\{\omega + \frac{1}{\xi^2\omega(\omega^2-\beta)}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$x = m\left\{\omega + \frac{1}{\xi^2\omega(\omega^2-\alpha)}\right\}$$

Отсюда по ур-ію (15)

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 = \omega^2 + \frac{1}{\xi^2\omega^2}$$

Слѣдов.: $\xi^2\omega = \frac{1}{\omega(r^2-\omega^2)}$

и вставивъ въ (16): $x = m\left\{\omega + \omega\left(\frac{r^2-\omega^2}{\omega^2-\alpha}\right)\right\} =$

$$= m\omega\left\{1 + \frac{r^2-\omega^2}{\omega^2-\alpha}\right\} \text{ или}$$

$$x = \omega m\,\frac{r^2-\alpha}{\omega^2-\alpha}, \quad y = \omega n\,\frac{r^2-\beta}{\omega^2-\beta}; \quad z = \omega p\,\frac{r^2-\gamma}{\omega^2-\gamma}.$$

отсюда $\frac{x^2}{(r^2-\alpha)} = \omega^2 m^2\frac{(r^2-\alpha)}{(\omega^2-\alpha)^2} = \omega^2\left\{\frac{m^2(r^2-\omega^2)}{(\omega^2-\alpha)^2} + \frac{m^2}{\omega^2-\alpha}\right\}$ и прочее. ....

Складывая: $\frac{x^2}{r^2-\alpha} + \frac{y^2}{r^2-\beta} + \frac{z^2}{r^2-\gamma} = 1$ ..... (17)

Это ур-іе не содержитъ m, n, p и есть искомое ур-іе волны.

$\frac{\omega^2 m^2(r^2-\alpha)}{(\omega^2-\alpha)^2} \pm \frac{m^2}{(\omega^2-\alpha)}$ $\frac{\omega^2}{(r^2\xi-\omega^2)\xi}$ $\frac{m^2 r^2\omega^2}{(\omega^2-\alpha)^2} - \frac{\omega^4 m^2}{(\omega^2-\alpha)^2} \pm \frac{m^2\omega^2}{(\omega^2-\alpha)^2} + \frac{m^2\alpha}{(\omega^2-\alpha)}$

Это есть уравненіе поверхности, обертываемой плоскими волнами, или ур-іе[x] свѣтовой волны. По приведеніи къ одному знаменателю, получимъ ур-іе 4ой степени, въ чемъ нетрудно убѣдиться провѣркой.

Выразимъ ур-іе въ полярныхъ координатахъ. Оси выберемъ такъ, что $\alpha>\beta>\gamma$. λ, μ, ν - углы r съ осями координатъ. $x = r\cos\lambda$, $y = r\cos\mu$, $z = r\cos\nu$.

Получаемъ:

$$\frac{\cos^2\lambda}{r^2-\alpha}+\frac{\cos^2\mu}{r^2-\beta}+\frac{\cos^2\nu}{r^2-\gamma}=\frac{1}{r^2}\quad(a).$$

$$\frac{\cos^2\lambda}{r^2}+\frac{\cos^2\mu}{r^2}+\frac{\cos^2\nu}{r^2}=\frac{1}{r^2}\quad\dots\quad(в)$$

Вычитаемъ изъ (а) (в):

$$\cos^2\lambda\left[\frac{1}{r^2-\alpha}-\frac{1}{r^2}\right]+\cos^2\mu\left[\frac{1}{r^2-\beta}-\frac{1}{r^2}\right]+$$
$$+\cos^2\nu\left[\frac{1}{r^2-\gamma}-\frac{1}{r^2}\right]=0.$$

или $\cos^2\lambda\frac{\alpha}{r^2-\alpha}+\cos^2\mu\frac{\beta}{r^2-\beta}+\cos^2\nu\frac{\gamma}{r^2-\gamma}=0$

Это ур-іе поверхности свѣтовой волны въ полярныхъ координатахъ. По приведеніи къ одному знаменателю

$$(r^2-\beta)(r^2-\gamma)\alpha\cos^2\lambda+(r^2-\alpha)(r^2-\gamma)\beta\cos^2\mu+(r^2-\alpha)(r^2-\beta)\gamma\cos^2\nu=0.\ (е)$$

Изслѣдованіемъ поверхностей волнъ занимались многіе геометры, въ томъ числѣ извѣстный Шаль. Мы не имѣемъ возможности изложить всѣ

---

[x] пропущено: поверхности.

свойства этихъ поверхностей.

Будемъ разсматривать кривыя пересѣченія поверхности (A) съ плоск. координатъ

I. Пусть $z=0$. Для всѣхъ радіусовъ векторовъ, лежащихъ въ плоскости xy, $\nu=90°$.

Въ ур-іи (A) послѣдній членъ поэтому отпадаетъ.

Имѣемъ: $(r^2-\gamma)(r^2\alpha\, cs^2\lambda-\alpha\beta\, cs^2\lambda+r^2\beta\, cs^2\mu-\alpha\beta\, cs^2\mu)=0$.

Но при $\nu=90°$ $cs^2\lambda+cs^2\mu=1$, поэтому $\alpha\beta(cs^2\lambda+cs^2\mu)=\alpha\beta$. Кромѣ того $\alpha r^2 cs^2\lambda=\alpha x^2$ и $\beta cs^2 r^2\mu=\beta y^2$.

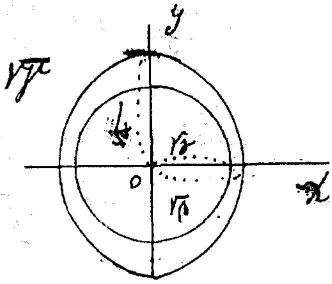
$(r^2-\gamma)[(\alpha x^2+\beta y^2)-(\alpha\beta)]=0$.

Ур-іе распадается на 2 множителя.

Имѣемъ въ плоскости xy 2 геометрическихъ мѣста (I):

1) $r^2-\gamma=0$ — ур-іе круга съ радіусомъ $\sqrt{\gamma}$

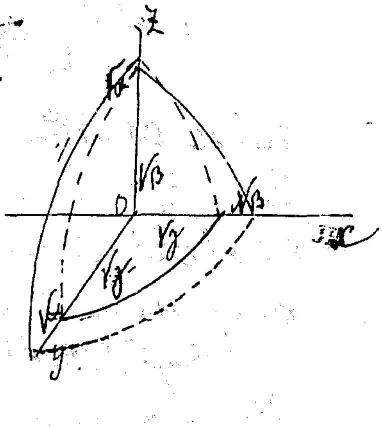
и 2) $\frac{x^2}{\beta}+\frac{y^2}{\alpha}=1$ — ур-іе эллипсиса съ полуосями $\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}$. Кругъ лежитъ внутри эллипсиса, такъ какъ $\sqrt{\gamma}$ меньше $\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}$.



II. При $x=0$, $\lambda=90°$. Получаемъ: $(r^2-\alpha)(\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma)=0$ — пересѣченіе съ плоск. yz (2).

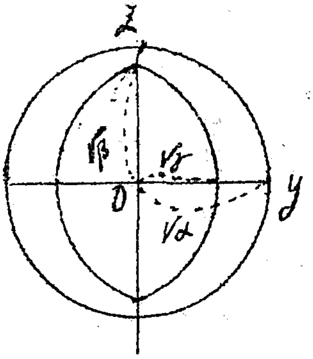
1) $r^2-\alpha=0$ ур. круга съ рад. $\sqrt{\alpha}$.

2) $\frac{y^2}{\gamma}+\frac{z^2}{\beta}=1$ — ур. эллипсиса съ полуосями $\sqrt{\gamma}$ и $\sqrt{\beta}$.



Кругъ лежитъ внѣ эллипсиса, большая ось котораго совпадаетъ съ осью z.

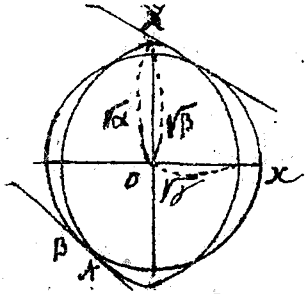
III. $y=0$; $\mu=90°$. $(r^2-\beta)(\alpha x^2+\gamma z^2-\alpha\gamma)=0$. Пересѣч.



съ плоскостью xz(3).

1) $r^2-\beta=0$ – уравненіе круга радіуса $\sqrt{\beta}$.

2) $\frac{x^2}{\gamma}+\frac{z^2}{\alpha}=1$ – ур-іе эллипсиса съ полуосями $\sqrt{\gamma}$ и $\sqrt{\alpha}$. Кругъ пересѣкаетъ эллипсисъ, большая ось котораго совпадаетъ съ осью z.



Нормаль къ плоскости, касающейся поверхности волны, проведенная изъ центра 0, не совпадаетъ, говоря вообще, съ радіусомъ векторомъ, проведеннымъ въ точку соприкосновенія. Исключенія составляютъ точки пересѣченія поверхности волны съ осями, и еще въ случаяхъ, которые будутъ показаны ниже. Если черезъ точку 0 въ какое-нибудь мгновеніе проходитъ плоская свѣтовая волна, то черезъ единицу времени положеніе этой плоской волны представится параллельной ей плоскостью, касающейся волновой поверхности, описанной около точки 0. Длина нормали, опущенной изъ 0 на эту плоскость, представитъ скорость

Лит. общ. распр. полезн. книгъ.

распространенія волны, а длина радіуса вектора, проведеннаго въ точку касанія, - скорость распространенія луча. Радіусъ векторъ представитъ его направленіе, слѣдовательно, лучъ вообще лежитъ наклонно къ несущей его плоской волнѣ. Въ средахъ же некристаллическихъ онъ всегда перпендикуляренъ къ плоской волнѣ.

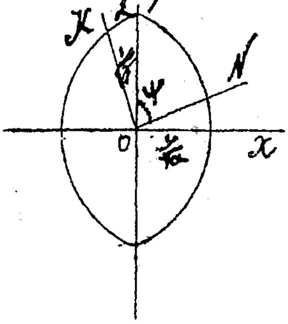
Равенство обѣихъ скоростей имѣетъ мѣсто только въ томъ случаѣ, когда волна перпендикулярна къ одной изъ осей координатъ, и еще въ 4хъ особенныхъ положеніяхъ плоской волны, на которыя сейчасъ и укажемъ. На поверхности волны имѣется 4 воронкообразныхъ углубленія, вершины которыхъ, какъ показываютъ наши чертежи, лежатъ въ плоскости xz. Въ плоскости zx (черт. 3) проведемъ касательную такъ, чтобы она одновременно касалась обѣихъ кривыхъ. Скорость волны будетъ $=\sqrt{\beta}$ - длинѣ нормали OA = радіусу криваго сѣченія. Касательная плоскость, проведенная черезъ эту касательную (она $\perp$ пл-ти zx) будетъ параллельна плоскостямъ круговыхъ сѣченій нашего эллипсоида упругости, ур-іе котораго $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$ было выведено раньше. Сейчасъ это докажемъ:

Пусть уголъ нормали съ осью z будетъ θ, точки касанія -(x_1, z_1) и (x_2, z_2).

Уравненіе касательной къ эллипсису — $\frac{xx_1}{\gamma}+\frac{zz_1}{\alpha}=1$, уравненіе круга — $\frac{x^2+z^2}{\beta}=1$, касательной къ нему — $\frac{xx_2}{\beta}+\frac{zz_2}{\beta}=1$. Это одна и таже прямая, поэтому $\frac{x_1}{\gamma}=\frac{x_2}{\beta}$, $\frac{z_1}{\alpha}=\frac{z_2}{\beta}$, но такъ какъ $x_2=\sqrt{\beta}\sin\theta$, $z_2=\sqrt{\beta}\cos\theta$, то $x_1=\frac{\gamma}{\beta}x_2=\frac{\gamma}{\beta}\sqrt{\beta}\sin\theta$, $z_1=\frac{\alpha}{\beta}z_2=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta}\cos\theta$.

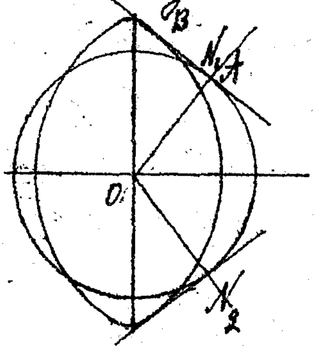
x_1 и z_1 должны удовлетворять ур-ію эллипсиса, т. е. $\frac{\gamma^2\beta}{\gamma\beta^2}\sin^2\theta+\frac{\alpha^2\beta}{\alpha\beta^2}\cos^2\theta=1$ или $\gamma\sin^2\theta+\alpha\cos^2\theta=\beta$, $\cos\theta=\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}$.

Пересѣчемъ теперь эллипсоидъ упругости $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$ плоскостью $y=0$. Получимъ въ сѣченіи эллипсъ $\alpha x^2+\gamma z^2=1$.

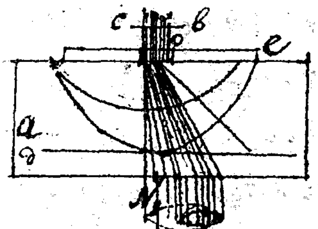


Его главными полуосями будутъ $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Плоскость круговаго сѣченія пересѣкаетъ его по OK, при чемъ $OK=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Нормаль къ круговому сѣченію OK означимъ черезъ N. Ея уголъ съ осью Z — черезъ φ. Координаты точки K черезъ X и Z. $x=\frac{-1}{\sqrt{\beta}}\cos\varphi$, $z=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sin\varphi$. Точка K лежитъ на эллипсѣ, поэтому $\alpha\frac{1}{\beta}\cos^2\varphi+\gamma\frac{1}{\beta}\sin^2\varphi=1$.
$\alpha\cos^2\varphi+\gamma\sin^2\varphi=\beta$ или $\alpha\cos^2\varphi+\gamma-\gamma\cos^2\varphi=\beta$, откуда $\cos\varphi=\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}$. Видимъ, что уголъ, дѣлаемый нормалью къ плоскости круговаго сѣченія въ эллипсоидѣ упругости съ осью Z, равенъ углу нормали Ao съ той же осью; слѣдовательно Ao есть нормаль къ круговому сѣченію эллипсоида упругости и ему параллельна плоская

волна, перпендикулярная плоскости zx и касающаяся обѣихъ оболочекъ волновой поверхности. Это и требовалось доказать.



Нормали N₁ и N₂ перпендикулярныя къ круговымъ сѣченіямъ эллипсоида упругости называются главными оптическими осями. Кристаллы, имѣющіе указанную форму свѣтовой волны, имѣютъ, слѣд., двѣ оптическія оси, а потому называются двуосными. Плоская свѣтовая волна, параллельная круговому сѣченію эллипсоида упругости, распространяется въ кристаллѣ съ одной опредѣленной скоростью, равной $\sqrt{\beta}$. Если мы вырѣжемъ изъ двуоснаго кристалла пластинку а, перпендикулярную оси ON₁ и бросимъ на нее перпендикулярный пучекъ лучей в, проникающій въ кристаллъ черезъ атверстіе о въ ширмочкѣ е, то плоская волна е войдетъ въ кристаллъ не преломляясь. Въ положеніи д она касается волновой поверхности по краю воронки, слѣд., ей соотвѣтствуетъ полный конусъ лучей, который выйдетъ полымъ цилиндрическимъ лучемъ. Это явленіе



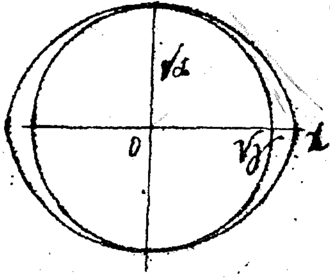
называется внутреней конической рефракціей и оправдывается опытомъ.

Обратимся снова къ уравненію свѣтовой волны.

$$(r^2-\beta)(r^2-\gamma)\alpha\cos^2\lambda+(r^2-\alpha)(r^2-\gamma)\beta\cos^2\mu+$$
$$+(r^2-\alpha)(r^2-\beta)\gamma\cos^2\nu=0.$$

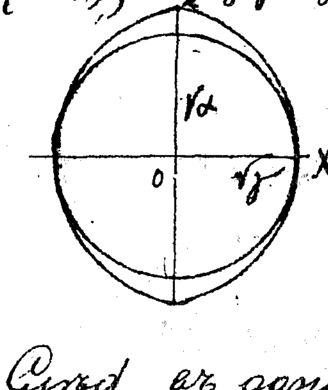
Мы принимали $\alpha>\beta>\gamma$. Разсмотримъ случаи 1) $\alpha=\beta$ и 2) $\beta=\gamma$ и 3) $\alpha=\beta=\gamma$.

1) $\alpha=\beta$. $(r^2-\alpha)\{\alpha r^2\cos^2\lambda+\alpha r^2\cos^2\mu+\gamma r^2\cos^2\nu-\alpha\gamma(\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu)\}=0$. $(r^2-\alpha)\{\alpha x^2+\alpha y^2+\gamma z^2-\alpha\gamma\}=0$. Имѣемъ совокупность двухъ поверхностей: шара $r^2=\alpha$ съ радіусомъ $\sqrt{\alpha}$ и эллипсоида вращенія около оси z — $\frac{x^2+y^2}{\gamma}+\frac{z^2}{\alpha}=1$. Его полуоси будутъ $\sqrt{\gamma}$ и $\sqrt{\alpha}$.



Обѣ оптическія оси совпадаютъ на оси z — общемъ діаметрѣ шара и эллипсоида. Такого рода одноосные кристаллы называются положительными или притягивающими (кварцъ) (эллипсоидъ внутри шара.

2). $\beta=\gamma$ — случай, подобный предыдущему. $(r^2-\gamma)\{\alpha x^2+\gamma y^2+\gamma z^2-\alpha\gamma\}=0$.



Имѣемъ шаръ внутри эллипсоида. Кристаллы называются отрицательными, отталкивающими (исландскій шпатъ. Здѣсь оптическія оси совпали съ осью x.

Слѣд., въ одноосныхъ кристаллахъ точка

прикосновенія обѣихъ полостей волны находится на оптической оси.

Остановимся на вопросѣ о лучахъ. Беремъ эллипсоидъ упругости $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$. и уравненіе скоростей $\frac{m^2}{\omega^2-\alpha}+\frac{n^2}{\omega^2-\beta}+\frac{p^2}{\omega^2-\gamma}=0$ .. (2).

Представимъ себѣ въ эллипсоидѣ упругости нѣкоторое сѣченіе, проходящее черезъ центръ. На перпендикулярѣ, возставленномъ изъ центра такого эллиптическаго сѣченія, будемъ откладывать обратныя величины его полуосей, т. е. $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. Концы всѣхъ такихъ перпендикуляровъ дадутъ нѣкоторую поверхность, опредѣляемую полярнымъ ур-іемъ:

$$f(r, m, n, p)=0, \text{ гдѣ } r=1/a.$$

Но $a=1/\omega$; гдѣ ω - скорость распространенія волны, значитъ $r=\omega$. Слѣд, ур-іе поверхности будетъ

$$f(\omega, m, n, p)=0.$$

Но это есть въ тоже время зависимость между скоростью распространенія ω и направленіемъ плоской волны.

Такая зависимость дается ур-іемъ (2); значитъ полярное ур-іе искомой поверхности и будетъ, замѣняя (2) ω - r:

$$\frac{m^2}{r^2-\alpha}+\frac{n^2}{r^2-\beta}+\frac{p^2}{r^2-\gamma}=0$$ - уравненіе (упр) поверхности упругости Френеля.

Если на перпендикуляръ будемъ откладывать не обратныя, а прямыя величины полуосей, то $r = a = \frac{1}{\omega}$, $\omega = 1/r$, получимъ $\frac{m^2}{1/r^2-\alpha} + \frac{n^2}{\frac{1}{r^2}-\beta} + \frac{p^2}{1/r^2-\gamma} = 0$ . . (a)

Беремъ еще уравненіе такъназываемаго эллипсоида Плюкера (Plücker)

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \quad \ldots \quad (b).$$

Будемъ съ нимъ поступать такъ, как раньше мы только что поступили съ эллипсоидомъ упругости, то есть на перпендикулярахъ къ его сѣченіямъ будемъ откладывать длины z = равныя полуосямъ сѣченій. Мы получимъ поверхность, которая представится ур-іем а съ тѣмъ различіемъ, что теперь роль α, β, γ играютъ $1/\alpha$, $1/\beta$, $1/\gamma$. Такимъ образомъ получимъ:

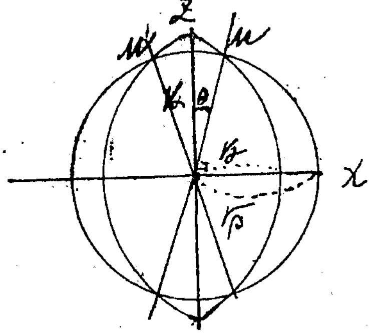
$$\frac{m^2}{1/r^2-1/\alpha} + \frac{n^2}{1/r^2-1/\beta} + \frac{p^2}{1/r^2-1/\gamma} = 0.$$ Вмѣсто m, n и p подставимъ $\cos\lambda$, $\cos\mu$ и $\cos\nu$. По упрощеніи получаемъ:

$$\frac{\alpha\cos^2\lambda}{r^2-\alpha} + \frac{\beta\cos^2\mu}{r^2-\beta} + \frac{\gamma\cos^2\nu}{r^2-\gamma} = 0.$$

Это есть наше ур-іе свѣтовой волны. Слѣдовательно, свѣтовая волна можетъ быть построена по точкамъ, пользуясь эллипсоидомъ Плюкера. Векторы нашей поверхности представляютъ скорости распространенія лучей.

Въ эллипсоидѣ Плюкнера, какъ и въ эллипсоидѣ упругости, имѣются круговыя сѣченія. Какое значеніе имѣютъ эти сѣченія? Если мы возьмемъ какое нибудь сѣченіе, то его полуоси будутъ неравны между собой. Откладывая эти полуоси на нормали къ сѣченію, мы получаемъ двѣ точки свѣтовой волны, какъ показываетъ предидущее построеніе. Слѣдовательно, эти полуоси представляютъ скорости лучей, направленіе которыхъ перпендикулярно сѣченію. Это значитъ, что по нормали къ этому сѣченію будутъ распространяться два луча съ различными скоростями. По нормали же къ круговому сѣченію эллипсоида Плюккера будетъ идти всего одинъ лучъ. Нормали къ круговымъ сѣченіямъ этого эллипсоида называются осями лучей или вторичными оптическими осями.

Для опредѣленія направленій вторичныхъ лучей разсѣчемъ эллипсоидъ Плюккера плоскостью zx ($y=0$). Получимъ въ сѣченіи $\frac{x^2}{a}+\frac{z^2}{c}=1$. Радіусъ кругового сѣченія эллипсоида Плюккера равенъ его среднѣй полуоси, т. е. $\sqrt{\beta}$.

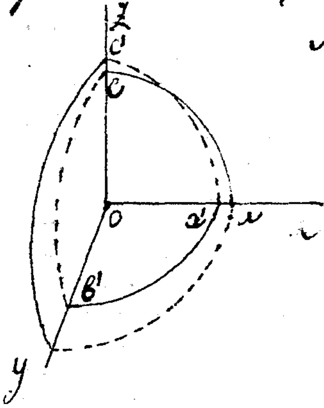


Уголъ наклоненія нормали N кругового сѣченія къ оси z обозначимъ черезъ ψ. Тогда координаты точки K будутъ: $x=-\sqrt{\beta}cs\psi$, $z=\sqrt{\beta}sn\psi$, отсюда $\beta/\alpha\, cs^2\psi+\beta/\gamma\, sn^2\psi=1$ или $\frac{cs^2\psi}{\alpha}+\frac{1-cs^2\psi}{\gamma}=\frac{1}{\beta}$, откуда $cs\psi=\sqrt{\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}{1/\alpha-1/\gamma}}$.

Этимъ равенствомъ опредѣляется направленіе вторичныхъ оптическихъ осей. Онѣ совпадаютъ съ линіями, идущими отъ центра свѣтовой волны къ вершинамъ воронокъ, т. е. съ OM и OM₁. Отыщемъ $cs\theta$ угла линіи OM съ осью z. Точка M имѣетъ координаты $x=OM\,sn\theta=\sqrt{\beta}sn\theta$, $z=\sqrt{\beta}cs\theta$; она лежитъ на эллипсисѣ $\frac{x^2}{\gamma}+\frac{z^2}{\alpha}=1$, а потому $sn^2\theta+\frac{\beta}{\alpha}cs^2\theta=1$. Слѣд., $\frac{1-cs^2\theta}{\gamma}+\frac{cs^2\theta}{\alpha}=\frac{1}{\beta}$; откуда

$$cs\theta=\sqrt{\frac{1/\beta-\frac{1}{\gamma}}{1/\alpha-1/\gamma}}$$, т. е. $\theta=\psi$. Слѣд. OM и OM₁ представляютъ нормали къ круговымъ сѣченіямъ эллипсоида Плюккера.

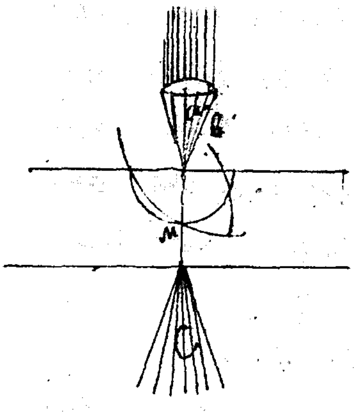
Мы представляли себѣ три кристаллографическихъ оси; оси координатъ были имъ параллельны. α, β, γ - были коэффиціенты упругости эфира въ кристаллической средѣ, перемѣщенія коей относились къ указаннымъ осямъ; α, β, γ. Въ каждой изъ плоскостей координатъ мы имѣли въ сѣченіи по одному круговому сѣченію: въ плоскости xy радіуса $\sqrt{\gamma}$, xz-$\sqrt{\beta}$, yz-$\sqrt{\alpha}$. Эти $\sqrt{\alpha}$... мы можемъ найти путемъ опыта. Соединяя поочередно точки пересѣченій этихъ круговъ и осей координатъ эллиптическими дугами ав, ве, и а'с', мы получимъ изображеніе пересѣченія поверхности волны съ плоскостями координатъ (См. черт).



Представимъ себѣ, что мы вырѣзываемъ изъ кристалла призму такъ, что ребра ея параллельны оси Z. Ось Z дѣлитъ пополамъ уголъ между оптическими осями кристалла; направленіе осей на опытѣ опредѣляется, какъ извѣстно, на основаніи цвѣтныхъ фигуръ, представляемыхъ кристаллическими пластинками въ поляризованномъ свѣтѣ. Лучъ, падающій на призму въ плоскости перпендикулярной къ оси Z, раздвоится внутри кристалла. Одинъ изъ лучей будетъ распространяться съ одинаковой скоростью при всякомъ наклонѣ луча падающаго. Этотъ лучъ будетъ соотвѣтствовать радіусу вектору круговаго сѣченія,— его скорость есть $\sqrt{\gamma}$. Онъ слѣдуетъ законамъ Декарта и называется обыкновеннымъ. Скорость другого луча представится радіусомъ векторомъ эллипсиса а в, лежащимъ въ направленіи луча. Эта скорость зависитъ отъ направленія и лучъ называется необыкновеннымъ. Онъ не слѣдуетъ Декартовымъ законамъ преломленія. Для луча обыкновеннаго показатель преломленія $n = \frac{v}{\sqrt{\gamma}}$, гдѣ v — скорость свѣта въ пустотѣ. Если $v=1$, то $n = 1/\sqrt{\gamma}$. Мы можемъ такимъ образомъ, вырѣзывая призмы съ ребрами, параллельными осямъ x, y и z, и отыскивая между двумя лучами, выходящими изъ призмы, тотъ, который слѣдуетъ законамъ Декарта, опредѣлить α, β и γ. Такія опредѣленія были, напр., сдѣланы Рудбергомъ для топаза и арагонита. Зная α, β и γ, можно вычислить и уголъ между оптическими осями кристалла. Для этого служитъ формула $cs\,\varphi \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}$. Для вторичныхъ оптическихъ осей $cs\,\varphi_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}{1/\alpha - 1/\gamma}}$.

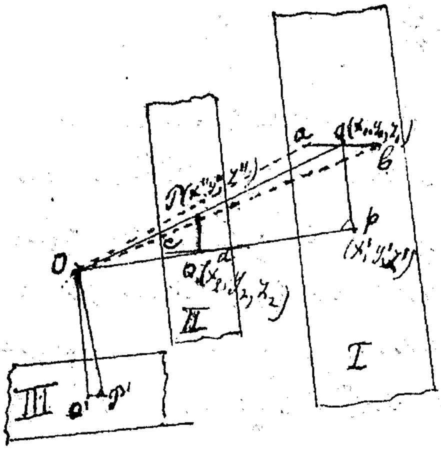
Уголъ между оптическими осями Гакре

опредѣляется опытомъ. Существованіемъ вторичныхъ осей обусловливается явленіе такъ называемой внѣшней конической рефракціи. Вторичная оптическая ось проходитъ чрезъ вершину M воронки. Эта вершина представляетъ общую точку прикосновенія безчисленнаго множества касательныхъ плоскостей, которыя могутъ быть проведены въ точкѣ M по внутренней поверхности воронки. Слѣдовательно, пучку плоскихъ волнъ, имѣющихъ эти направленія, будетъ соотвѣтствовать одинъ лучъ OM. Вырѣзывая пластинку ⊥ къ вторичной оптической оси и бросая на нее пучекъ сходящихся лучей a, соотвѣтствующихъ множеству плоскихъ волнъв, всѣ эти лучи пойдутъ въ кристаллѣ по OM и выйдя наружу дадутъ полный свѣтовой конусъ C внѣ кристалла.



О направленіи свѣтового колебанія на плоской волнѣ.

Около нѣкоторой точки O опишемъ эллипсоидъ упругости Френеля, представляемый уравненіемъ $ax^2+by^2+cz^2=1$. На эллипсоидѣ возьмемъ точку $q(x, y, z)$ и въ этой точкѣ проведемъ касательную плоскость.



Ея уравненіе $\alpha x_1 x+\beta y_1 y+\gamma z_1 z=1$. На ту же плоскость опустимъ перпендикуляръ Op. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи,

$\overline{op}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha x_1)^2+(\beta y_1)^2+(\gamma z_1)^2}}$, $cs(op_1)x=\alpha x_1\cdot\overline{op}$ и т. д.
$x'=\overline{op}\cdot cs(op_1x)=\alpha x_1\cdot\overline{op}^2$; $y'=\beta y_1\cdot\overline{op}^2$;
$z'=\gamma z_1.\overline{op}^2$.

На перпендикулярѣ op возьмемъ такую точку Q, чтобы $OQ=\frac{1}{\overline{op}}$. Координаты точки Q пусть будутъ x_2, y_2, z_2. Такъ какъ Q лежитъ на прямой op, то мы получимъ x_2, y_2, z_2, если уменьшимъ x', y', z' въ отношеніи $\frac{OQ}{Op}=\frac{1}{Op^2}$ ($x_2=\frac{OQ}{Op}x'=\frac{1}{Op^2}x'=\alpha x_1$, $y_2=\beta y_1$, $z_2=\gamma z_1$. Точка q лежитъ на эллипсоидѣ Френеля. Значитъ $\alpha x_1^2+\beta y_1^2+\gamma z_1^2=1$. Кромѣ того $x_1=\frac{x_2}{\alpha}$, $y_1=\frac{y_2}{\beta}$, $z_1=\frac{z_2}{\gamma}$. Послѣ подстановки $\frac{x_2^2}{\alpha}+\frac{y_2^2}{\beta}+\frac{z_2^2}{\gamma}=1$ — уравненіе эллипсоида Плюккера; на немъ, слѣдов., лежитъ точка Q. Въ точкѣ Q проведемъ касательную плоскость къ этому новому эллипсоиду. Ея ур-іе $\frac{x_2}{\alpha}x+\frac{y_2}{\beta}y+\frac{z_2}{\gamma}z=1$. На эту плоскость также опустимъ перпендикуляръ. Аналогично предыдущему координаты подошвы этого перпендикуляра будутъ:
$x''=\frac{x_2}{\alpha}\overline{OP}^2$, $y''=\frac{y^2}{\beta}\overline{OP}^2$, $z''=\frac{z_2}{\gamma}\overline{OP}^2$. Замѣнимъ $\frac{x^2}{\alpha}$ чрезъ

x_1 и т.д.: $x''=x_1\overline{oP}^2$; $y''=y_1\overline{oP}^2$; $z''=z_1\overline{oP}^2$. Отсюда

$$\frac{x'''}{x_1}=\frac{y''}{y_1}=\frac{z''}{z_1}=\overline{oP}^2=\sqrt{\frac{x''^2+y''^2+z''^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{oP}{oq}.$$

Изъ первыхъ трехъ равенствъ заключаемъ, что точка P лежитъ на Oq. Кромѣ того видимъ, что $oP=\frac{1}{oq}$, т.е. длина перпендикуляра oP есть обратная величина радіуса вектора oq. Поэтому эллипсоидъ Плюккера называется обратнымъ эллипсоида Френеля.

Поставимъ себѣ цѣлью отыскать тотъ эллипсъ въ эллипсоидѣ Френеля, для котораго oq будетъ полуосью. Для этого проведемъ чрезъ точку q на касательной плоскости I прямую ab, перпендикулярную qP. Такъ как qP есть слѣдъ плоскости qoP, ⊥ой пл-сти I, то линія ab будетъ ⊥ къ пл-ти qoP, слѣд., ⊥ к qo. Но линія ab есть касательная къ эллипсису въ пл-ти aob, и т.к.к. она ⊥ къ радіусу вект. этого эллипс. Oq, то oq есть полуось этого эллипсиса. Итакъ, искомый нами эллипсисъ лежитъ въ плоскости aob. Положимъ, что съ этой плоскостью совпадаетъ плоская волна. Тогда Oq представитъ направленіе одного изъ двухъ колебаній, несомыхъ этой волной. Чрезъ единицу времени эта волна отойдетъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ oab, на величину $1/oq=\overline{oP}$.

Повернемъ POQ на 90° въ его плоскости. Плоскость II перейдетъ въ положеніе III, паралл-ое пл-ти aob. Эта плоскость III будетъ теперь совпадать съ плоской волной. Направленіе $P'Q' \parallel Oq$; слѣд. $P'Q'$ представитъ направленіе колебаній.

Аналогично предыдущему OQ будетъ полуосью эллипса, лежащаго въ плоскости Cod, при чемъ $cd \perp PQ$. Т. к. $OQ' \perp oq$, то $OQ' \perp$ к пл-ти Cod.

Разсѣкая эл-дъ Плюкера плоскостями и откладывая на перп-рахъ изъ центра длины, равныя длинамъ полуосей, получимъ, какъ выше было показано, поверхность свѣтовой волны. Слѣд. Q' есть точка свѣтовой волны въ кристаллѣ. Т. к. она лежитъ и на плоской волнѣ, которая въ своемъ положеніи (достигнутомъ по истеченіи 1 времени послѣ прохожденія черезъ центръ O) касается свѣтовой волны, то Q' есть точка прикосновенія плоской волны съ поверхностью свѣтовой волны въ кристаллѣ. Слѣд. OQ' есть одинъ изъ лучей, распространяемыхъ волной. OP' есть перп-ръ на плоскую волну, слѣд. OP' — проэкція луча OQ' на плоскости волны. Итакъ, видимъ, что направленіе колебаній, распространяемаго плоской волной въ кристаллѣ, пред-

[illegible] направленiемъ [illegible] луча на плоскость волны. Отсюда заключаемъ, что въ одноосныхъ кристаллахъ въ волнѣ необыкновенной колебанiя совершаются въ меридiанальныхъ плоскостяхъ, а въ обыкновенной — по параллелямъ. —